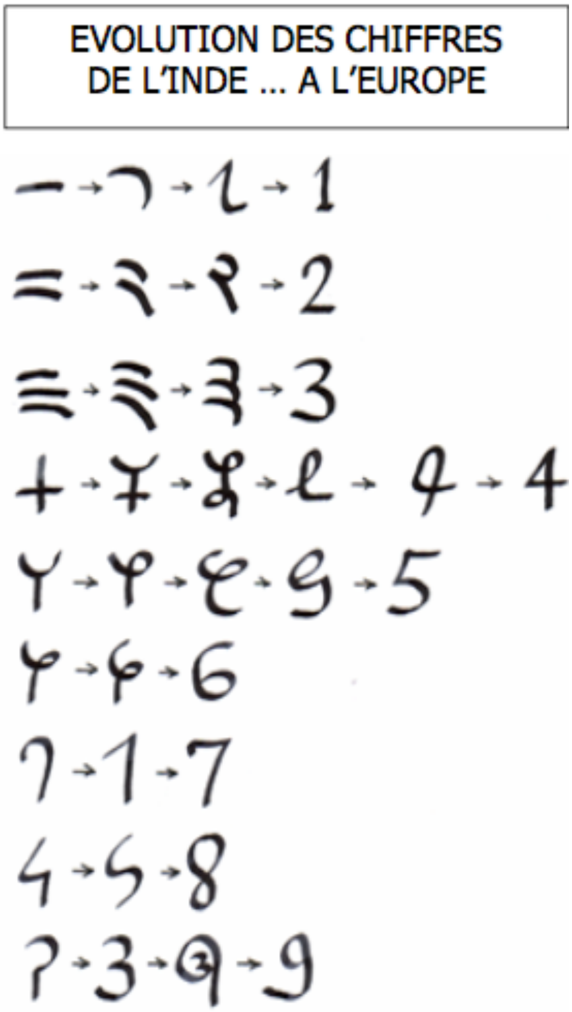
Les nombres décimaux

Ce que je dois savoir et savoir faire à la fin de cette leçon

- Savoir différencier un chiffre et un nombre.
- Savoir lire un nombre décimal et l'écrire en toutes lettres.
- Connaître le tableau de numération décimale et les rangs des chiffres dans un nombre.
- Connaître les propriétés reliant nombres entiers et nombres décimaux
- Savoir écrire un nombre décimal sous forme d'une fraction décimale ou sous forme de l'addition d'un nombre entier et d'une (ou plusieurs) fraction(s) décimale(s)



Pour écrire les nombres, on utilise 10 symboles que nous appelons « chiffres » : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.
Ces chiffres indo-arabes ont été inventés par les indiens et transmis aux européens au X^{ème} siècle par les arabes, via l'Espagne). Nos 10 doigts en sont certainement à l'origine.
Avant cela, nous utilisions les chiffres romains qui ne contiennent pas de zéro.
Le « 0 » qui vient aussi de l'Inde est resté longtemps ignoré ; ils l'appelaient « sûnya » qui signifie « vide ».

Le mathématicien italien Léonard de Pise dit Fibonacci (1180-1250) introduit en Europe la **<u>numération de position</u>** : la valeur du chiffre varie en fonction de la place qu'il occupe dans l'écriture du nombre.

Al Kashi (1380-1430) mathématicien indien est à l'origine des nombres décimaux mais c'est le mathématicien belge Simon Stevin qui se rapprochera de la notation actuelle.

C'est un progrès considérable pour effectuer des opérations par rapport à l'écriture romaine. Le mot « virgule » vient du latin « virgula » qui désignait une « petite branche ».

Notre système de numération actuel est un système parmi d'autres. La base de numération utilisée est la base 10 (d'où le mot décimal). Les autres système parfois utilisés sont la numération binaire (base 2, ordinateur), octale (base 8 informatique), duodécimale (base 12, plus intéressante que la base 10 car 12 est divisible par 2, 3, 4, 5 et 6), hexadécimale (base 16), vigésimale ou vicésimale (base 20, mayas et moyen-âge), sexagésimale (base 60, babyloniens et durée).

I. Les nombres entiers

1) Chiffres et nombres

Le système de numération que nous utilisons est un système **décimal** et de **position.**

- **Décimal** car nous utilisons dix chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

Les chiffres sont donc des symboles qui servent à écrire les nombres.

- **Position** pour dire que chaque chiffre a une signification différente selon le rang (la position) qu'il occupe dans l'écriture du nombre.

$$747 = (7\times 100) + (4\times 10) + 7$$

7 centaines 4 dizaines 7 unités

Les deux chiffres 7 n'ont donc pas la même signification selon leur rang.

2) Écriture et lecture d'un nombre entier

a) L'écriture

En français, il suffit de 26 mots pour écrire les nombres entiers courants. Ces mots sont les suivants :

Zéro – un – deux – trois – quatre – cinq – six – sept- huit – neuf

Dix – onze- douze – treize – quatorze – quinze – seize

Vingt – trente- quarante- cinquante – soixante
En Belgique ou en Suisse, il faut ajouter : septante – octante – nonante

Cent – mille – million – milliard

Remarque :
Il existe aussi des plus grands nombres :

- Billion (1 000 000 000 000)
- Billiard (1 suivi de 15 zéros)
- Trillion (1 suivi de 18 zéros)
- Quatrillion (1 suivi de 24 zéros)
- Quintillion (1 suivi de 30 zéros)
- Sextillion (1 suivi de 36 zéros)
- Septillion (1 suivi de 42 zéros)
- Octillion (1 suivi de 48 zéros)
- Nonillion (1 suivi de 54 zéros)
- Décillion (1 suivi de 60 zéros)
- Googol (1 suivi de 100 zéros)
- Asankhyeya (1 suivi de 140 zéros – Origine bouddhiques)

Règles d'orthographe :

- *Million* et *milliard* s'accordent toujours
- Le nombre *mille* est invariable
- Les nombres *vingt* et *cent* s'accordent sauf :
  - ☛ quand ils sont suivis d'un autre nombre
  - ☛ quand ils sont employés pour indiquer un rang
- On met un trait d'union entre les nombres inférieurs à cent, sauf s'il y a le mot « et ».

Exemples :

30 000 000 km : : trente millions de kilomètres
4 000 000 001 hab. : quatre milliards un habitants
5000 € : cinq mille euros
842 321 : huit cent quarante-deux mille trois cent vingt et un
300 kg : trois cents kilogrammes
530 : cinq cent trente
p 500 : page cinq cent

Remarques :

- Une ordonnance du Conseil Supérieur de la Langue Française (JO du 06/12/1990) accepte que l'on mette des tirets partout (deux-cent-soixante-et-onze) mais celle-ci est rarement appliquée.

- Pour les mesures, l'usage de très grands nombres est simplifié par l'utilisation de préfixes qu'on accole à l'unité :

  Kilo (K) pour mille
  Méga (M) pour million
  Giga (G) pour milliard
  Téra (T) pour mille milliard (1 suivi de 12 zéro)
  Péta pour 1 suivi de 15 zéros
  Exa pour 1 suivi de 18 zéros

- On utilise ainsi les Kg (1000 grammes), les Ko (1000 octets) ou les Km (1000 mètres) et aussi les Go (1 Go = 1 000 000 000 octets) ou les TV (1 Téra Volt = 100 000 000 000 Volts)

b) La lecture

Pour faciliter la lecture d'un grand nombre entier, on sépare son écriture en groupes de trois chiffres à partir du chiffre des unités.
Chaque groupe de trois chiffres est appelé une classe.

Chaque classe est composée des centaines (c), des dizaines (d) et des unités (u).

On résume généralement tout cela dans un tableau

Classe des millions			Classe des milliers			Classe des unités		
C	D	U	C	D	U	Centaines	Dizaines	Unités
0	0	0	0	0	0	0	3	4
			5	6	0	7	0	0
					5	7	1	3

Attention à ne pas confondre le chiffre des dizaines et le nombre de dizaines

- Dans le nombre 560 700, le chiffre des dizaines est 0 alors que le nombre de dizaines est 56 070.

- Certains zéros sont inutiles (même si on les écrit parfois) : ceux situés à gauche du premier chiffre non nul.
  Certains de ces zéros inutiles sont pourtant parfois écrits (étiquette, prix, date, affichage divers) quand il s'agit de respecter un format.

- Un nombre peut donc être décomposé de différentes manières selon ce que l'on veut mettre en évidence :

  $5\ 713 = (5 \times 1000) + (7 \times 100) + (1 \times 10) + 3$ met en évidence le rôle de chaque chiffre dans le nombre.

  $5\ 713 = (571 \times 10) + 3$ met en évidence le nombre de dizaines du nombre.

  $5\ 713 = (57 \times 100) + 13$ met en évidence le nombre de centaines du nombre.

II. Les nombres décimaux

Un nombre décimal n'est pas un « nombre à virgule »

Un nombre entier comme 2 est décimal malgré l'absence de virgule.
Pour être décimal un nombre doit pouvoir s'écrire avec une virgule.
Ainsi 159 peut s'écrire 159,0 donc 159 est décimal.

Il faut également distinguer un nombre de son écriture : 2 et 2,0 sont deux écritures différentes du même nombre.
On pourrait aussi écrire 2 avec d'autres systèmes de numérations : II avec le système romain ; 10 avec le système binaire ...etc. On peut aussi tout en restant dans notre système décimal utiliser des fractions ou des radicaux : $2 = \frac{6}{3} = \sqrt{4}$.

L'écriture décimale d'un nombre est celle qui utilise la virgule (en français, car en anglais, c'est un point qui sépare la partie entière de la partie décimale, la virgule étant utilisée comme séparateur des milliers).

Définition 1 :

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec une virgule.
Devant (à gauche) la virgule, il y a la **partie entière** (qui contient toujours au moins un chiffre des unités) et derrière (à droite) la virgule, il y a la **partie décimale** qui doit être **finie**.

Exemples :

0,08 ; 12,457 et 163,9 sont des écritures décimales de nombres décimaux.

Remarques :

- La partie décimale peut être nulle, le nombre est alors un entier.

Dans ce cas on n'écrit généralement pas la partie décimale et on ne met pas de virgule.
Tous les nombres entiers sont des nombres décimaux qui ont une partie décimale nulle.

Exemple :

12,0 est un nombre décimal et entier qu'on écrit plus simplement 12 mais qui peut aussi s'écrire 12,00.

- La partie décimale peut contenir beaucoup de chiffres, mais à partir d'un certain rang, on ne doit trouver que des zéros qu'on écrit généralement pas.

Exemple :

1 ÷ 256 = 0,00390625 = 0,003906250000... La partie décimale du quotient de 1 par 256 contient huit chiffres puis rien que des zéros. C'est un nombre décimal.
Ce qu'on appelle partie décimale de ce nombre ce sont les 390 625 cent millionièmes qui sont derrière la virgule. La partie entière est nulle ici.

- Si on ne peut pas écrire tous les chiffres de la partie décimale car ils sont en nombre infini, le nombre n'est pas un nombre décimal, c'est un nombre rationnel non décimal ou un nombre irrationnel.

Exemple :

$\frac{10}{11} = 10 \div 11 = 0{,}0909090909.....$ Le quotient de 10 par 11 est un nombre qui a une partie décimale infinie constituée d'une suite de chiffres qui se répète éternellement. On peut noter ce nombre $0{,}\overline{09}$ pour montrer que c'est le groupe de deux chiffres 09 qui se répète.
$\pi = 3{,}1415928...$ est un nombre qui a une partie décimale infinie mais où on ne peut pas trouver une suite de chiffres qui se répète.

$\frac{10}{11}$ et π sont deux nombres non décimaux (l'un est rationnel : c'est une fraction, l'autre est irrationnel).

<u>Définition 2 :</u>

Un nombre décimal est égal à **la somme de sa partie entière et de sa partie décimale**.
La **partie entière** est un **nombre entier** et **la partie décimale** est un **nombre inférieur à 1**.

$$173{,}56 = 173 + 0{,}56$$

Partie entière　　　　Partie décimale

Dans un nombre décimal, selon sa position par rapport à la virgule, un chiffre indique :

- les unités, les dizaines, les centaines…. dans la partie entière

- les dixièmes, les centièmes, les millièmes….dans la partie décimale.

<u>Exemple :</u>

classe des milliers			**classe des unités**			**dixièmes**	**centièmes**	**millièmes**	**dix-millièmes**
c	***d***	***u***	***c***	***d***	***u***				
					7,	1	2	3	4
		1	8	3	4,	2	9		

$$7{,}1234 = 7 + (1 \times 0{,}1) + (2 \times 0{,}01) + (3 \times 0{,}001) + (4 \times 0{,}0001)$$

<u>Remarques :</u>

- Pour écrire en lettres ou pour dicter un nombre décimal, on sépare les unités de la partie décimale : on dira pour 3045,067 que c'est 3045 unités et 67 millièmes. Souvent, c'est plus pratique mais moins élégant, on dit tout simplement ce que l'on voit de la partie décimale (trois mille quarante-cinq virgule zéro soixante-sept).

- Il existe aussi des préfixes pour les tout petits nombres décimaux lorsqu'ils sont des mesures :
  Déci (d, dixième)
  Centi (c, centième)
  Milli (m, millièmes)
  Micro (μ ,millionièmes)
  Nano (n, milliardièmes)

  On utilise ainsi les mg (1 mg = 0,001 g) ; les mm (1 mm = 0,001 m) ; les cm (1 cm = 0,01 m)…

- On peut supprimer tous les zéros qui débutent une partie entière ou qui terminent une partie décimale.

  <u>Exemple:</u>

  03,71 = 3,710 = 003,71 = 3,7100 = 3,71 (écriture la plus simple)

II. Écriture fractionnaire et décomposition d'un nombre décimal

1) Écriture fractionnaire et notion de fraction décimale

Définition 3 :

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le **numérateur est un nombre entier** et le **dénominateur est 1 ; 10 ; 100 ; 1000….**
Cette fraction est appelée **fraction décimale**.

Exemples :

$0{,}1 = \frac{1}{10}$ (un dixième) $0{,}7 = \frac{7}{10}$ (sept dixièmes) $0{,}72 = \frac{72}{100}$ (soixante-douze centièmes)

$5{,}34 = \frac{534}{100}$ (cinq cent trente-quatre centièmes)

$3{,}414 = \frac{3\,414}{1000}$ (trois mille quatre cent quatorze millièmes)

Remarque :

Un quotient de deux entiers n'est pas toujours décimal : le quotient de 1 par 256 peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale car $1 \div 256 = \frac{1}{256} = 0{,}00390625 = \frac{390\ 625}{100\ 000\ 000}$ mais pas celui de 10 par 11.

2) Décomposition d'un nombre décimal

Un nombre décimal peut se décomposer sous la forme d'une somme de nombres entiers et de fractions décimales.

Exemples :

$0{,}29 = \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$ $2{,}7 = 2 + \frac{7}{10}$ $28{,}39 = 28 + \frac{39}{100} = 20 + 8 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100}$

Autres décompositions possibles pour 28,39 :
20 + 8 + 0,3 + 0,09 ou (2×10) + (8×1) + (3×0,1) + (9×0,01) ou

$(2\times10)+(8\times1)+\left(3\times\frac{1}{10}\right)+\left(9\times\frac{1}{100}\right)$

3) Différentes écritures d'un même nombre

Le nombre 453,51 a plusieurs écritures possibles :

écriture décimale : $453{,}51$

en lettres : 453 unités 5 dixièmes et 1 centième **ou bien** 453 unités et 51 centièmes

fraction décimale : $\dfrac{45\ 351}{100}$

somme partie entière et partie décimale : $453{,}51 = 453 + 0{,}51$

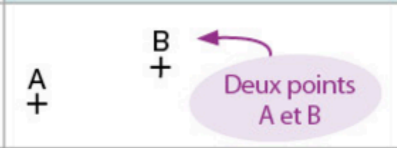
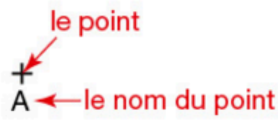
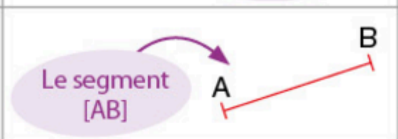
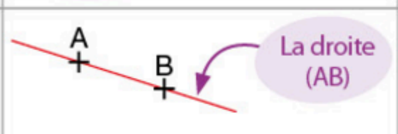
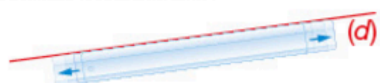
somme d'un entier et d'une fraction décimale : $453{,}51 = 453 + \dfrac{51}{100}$

décomposition : $453{,}51 = (4 \times 100) + (5 \times 10) + (3 \times 1) + \left(5 \times \dfrac{1}{10}\right) + \left(1 \times \dfrac{1}{100}\right)$

En lettre	Un dixième	Un centième	Un millième	Treize centièmes	Soixante-cinq millièmes	Deux cent trois dixièmes
Fraction décimale	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{100}$	$\dfrac{1}{1\ 000}$	$\dfrac{13}{100}$	$\dfrac{65}{1\ 000}$	$\dfrac{203}{10}$
Ecriture décimale	0,1	0,01	0,001	0,13	0,065	20,3

Les droites perpendiculaires et parallèles

I. Éléments de géométrie

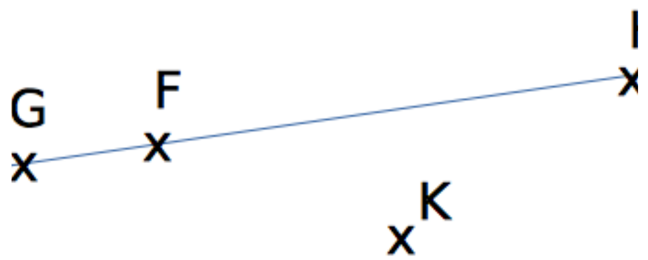
	Tracé et Notation	Définitions et remarques
Deux **points distincts** (c'est-à-dire qui ne sont pas confondus)		**Attention !** Sur une figure, deux points distincts ne peuvent pas avoir le même nom. 
Un **segment**		• On trace un segment en reliant deux points à la règle. • **Les points A et B sont les extrémités du segment [AB].**
Une **droite**		• La droite (AB) est le support du segment [AB]. • **Par deux points distincts, il passe une seule droite.**
		• **Une droite est une ligne droite illimitée.** (Elle peut être prolongée des deux côtés.) 
Une **demi-droite**		• **Le point A est l'origine de la demi-droite [AB).** **Attention !** Un crochet pour l'origine, à gauche ; une parenthèse, à droite, pour le côté illimité.

Définition 1 :

Un <u>segment de droite</u> est l'ensemble des points qui compose le plus court chemin pour aller d'un point à un autre. Si A et B sont des points, on note [AB] ou [BA] le segment de droite qui joint les points A et B.

<u>Exemple :</u>

Sur le segment [IG] il y a le point F, on note $F \in [IG]$
En revanche, comme le point K n'est pas sur le segment [IG], on note $F \notin [IG]$.



Définition 2 :

Trois points sont alignés lorsque l'un de ces trois points appartient au segment déterminé par les deux autres.

<u>Exemple :</u>

Sur la figure ci-dessus, les points I ; F et G sont alignés.

Définition 3 :

On appelle droite définie par deux points A et B l'ensemble des points alignés avec A et B, y compris ces points A et B. On note une telle droite (AB) ou (BA).

Remarques :

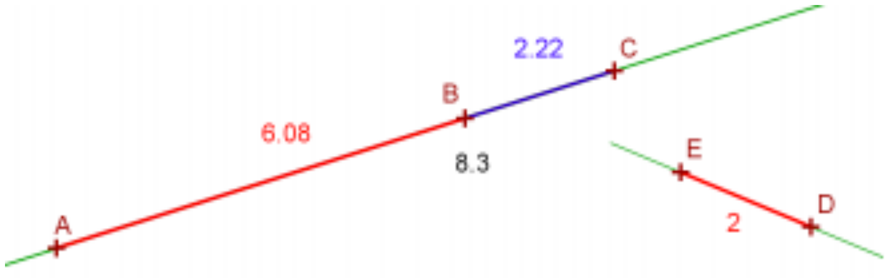
- Il est impossible de tracer une droite en entier, car une droite n'a pas d'extrémités.

En fait, on n'en trace toujours qu'une partie, c'est à dire qu'on trace un segment qui passe par ces deux points. Pour distinguer la représentation de la droite (AB) de celle du segment [AB], on prolonge généralement le segment des deux côtés.

- Trois points sont donc alignés lorsque l'un appartient à la droite définie par les deux autres points.

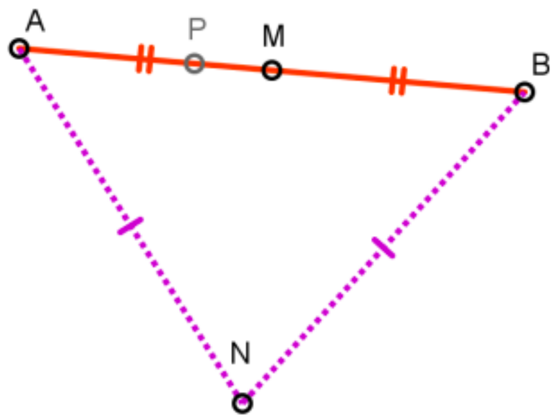
Propriété 1:

Le segment est le seul ensemble de points alignés que l'on peut mesurer (on mesure sa longueur). On note AB ou AB + BC = AC.



Propriété 2 :

Le segment est le sel ensemble de points alignés qui possède un milieu.
Le milieu du segment [AB] est le seul point du segment situé à égale distance des extrémités A et B.



Exemple :

Le point M est le milieu du segment [AB]

$$\Longleftrightarrow$$

$M \in [AB]$ **et** MA = MB

Remarque :

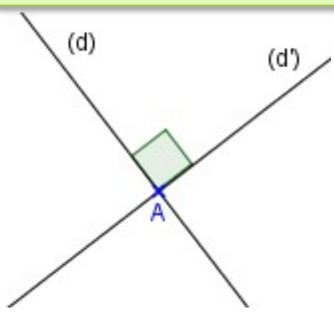
Si on a un point N tel que NA = NB alors on ne peut pas affirmer que N est le milieu du segment [AB].

II. Droites perpendiculaires

Définition 4 :

Deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit.

Exemple :

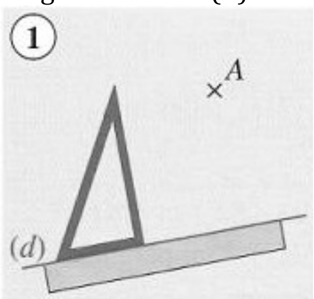
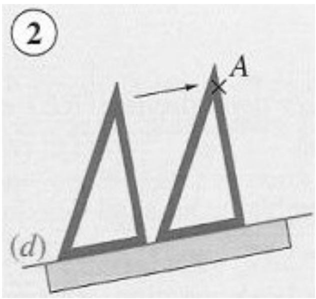
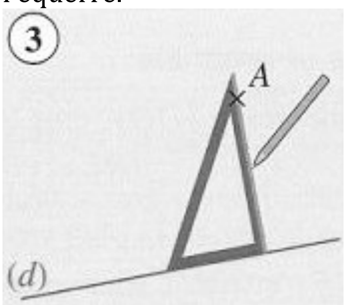
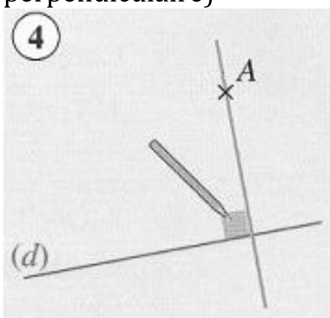


Notation : (d) ⊥ (d')

Remarques :

- Deux droites perpendiculaires sont sécantes.
- Pour coder deux droites perpendiculaires, il suffira de coder un seul angle droit avec un petit carré.
- Sur la figure ci-dessus, les droites (d) et (d') sont perpendiculaires en A.

Méthode de construction : Tracer la droite perpendiculaire à (d) passant par A.

1) On place un côté de l'angle droit de l'équerre le long de la droite (d). 	2) On fait glisser l'équerre jusqu'au point A. 	3) On trace la perpendiculaire avec l'autre côté de l'angle droit de l'équerre. 	4) On code la figure. (Ne pas oublier de prolonger la perpendiculaire) 

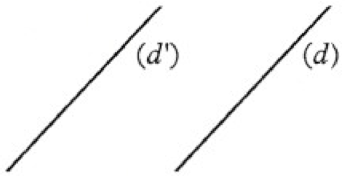
II. Droites parallèles

Définition 5 :

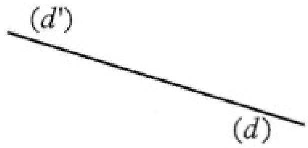
Deux droites parallèles sont deux droites qui ne sont pas sécantes.

Exemple :

Les droites *(d)* et *(d')* qui n'ont aucun point commun sont parallèles.

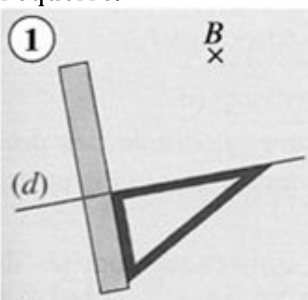
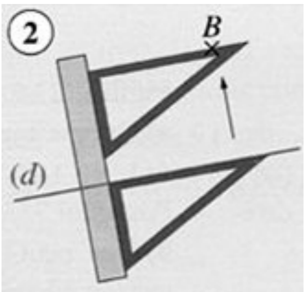
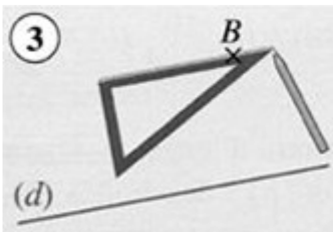
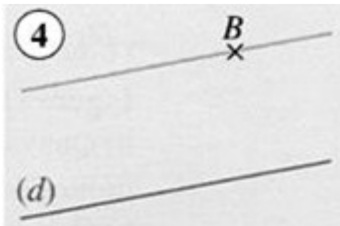


Les droites *(d)* et *(d')*, qui ont tous leurs points confondus, sont parallèles.



Notation : (d) // (d') signifie que les droites (d) et (d') sont parallèles.

Méthode de construction : Tracer la droite parallèle à (d) passant par B.

1) On place l'équerre le long de la droite (d) puis on place la règle contre l'équerre. 	2) On fait glisser l'équerre jusqu'au point B. 	3) On trace la droite quand l'équerre arrive au point B. 	4) On prolonge la droite que l'on vient de tracer. 

III. Propriétés

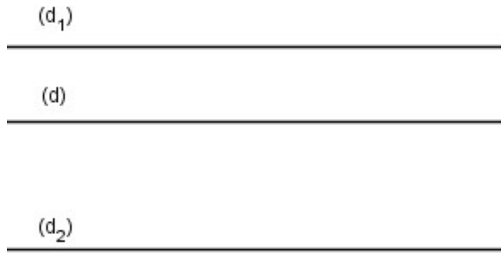
Propriété 3 :

Si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Exemple :

Données :

- $(d) // (d_1)$
- $(d) // (d_2)$



Conclusion :

- $(d_1) // (d_2)$

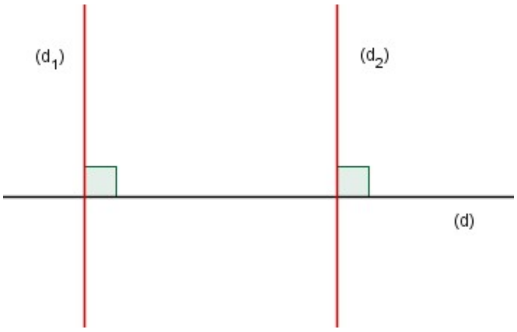
Propriété 4 :

Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Exemple :

Données :

- $(d_1) \perp (d)$
- $(d_2) \perp (d)$



Conclusion :

- $(d_1) // (d_2)$

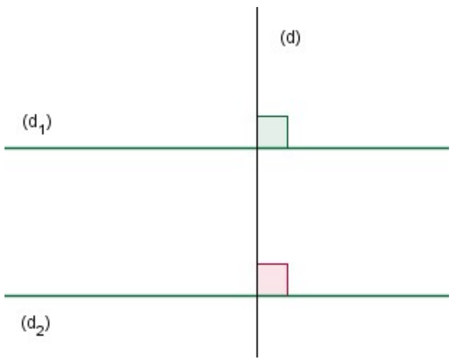
Propriété 5 :

Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Exemple :

Données :

- $(d_1) // (d_2)$
- $(d_1) \perp (d)$



Conclusion :

- $(d_2) \perp (d)$

Comparer les nombres décimaux

I. Représenter les nombres décimaux

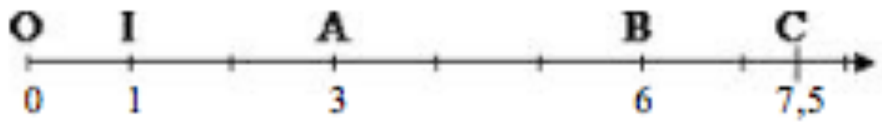
1) Demi-droite graduée

Définition 1 :

On appelle demi-droite graduée une demi-droite sur laquelle on a fixé :

- Un point O appelé origine de la demi-droite graduée
- Une unité de longueur que l'on reporte régulièrement à partir de l'origine
- Un sens marqué à l'aide d'une flèche

Exemple :



[OI) est une demi-droite d'origine O, d'unité de longueur OI et de sens O vers I.

2) Abscisse d'un point

Propriété 1 :

Sur une demi-droite graduée :
- chaque point est repéré par un nombre qui est appelé l'**abscisse** de ce point.
- à chaque nombre correspond un point

Exemple :

Sur la demi-droite graduée ci-dessus, le point O a pour abscisse 0, le point A a pour abscisse 3 et le point C a pour abscisse 7,5.

Remarques :

- Le mot abscisse vient du latin « abscissa » (ligne coupée) dû à l'allemand Leibniz en 1622.
- On note l'abscisse du point A de deux manières différentes :

  A(3) désigne que l'abscisse du point A est 3

  $x_A = 3$ désigne que l'abscisse du point A est 3.

II. Comparer les nombres décimaux

1) Les signes de comparaison

Définition 2 :

Comparer deux nombres, c'est dire s'ils sont égaux ou si l'un est plus petit ou plus grand que l'autre.

Exemples :

4,5=4,50 se lit " 4,5 est égal a 4,50"
3,2 < 9 se lit "3,2 est plus petit que 9"   ou "3,2 est strictement inférieur à 9"
9,4 > 4,2 se lit " 9,4 est plus grand que 4,2" ou "9,4 est strictement supérieur à 4,2"

2) Méthode de comparaison

MÉTHODE POUR COMPARER DEUX NOMBRES DÉCIMAUX		
Les deux nombres ont :	**Comparaison**	**Exemple**
des parties entières différentes.	Le plus petit est celui qui a la plus petite partie entière.	**5**,16 < **13**,02 parce que **5** < **13**
des parties entières égales et des chiffres des dixièmes différents.	Le plus petit est celui qui a le plus petit chiffre des dixièmes.	6,**3**4 < 6,**5**1 parce que **3** < **5**
des parties entières égales, des chiffres des dixièmes égaux et des chiffres des centièmes différents.	Le plus petit est celui qui a le plus petit chiffre des centièmes.	9,5**6**1 < 9,5**9** parce que **6** < **9**

Et ainsi de suite...

3) Ordre croissant et décroissant

Définition 3 :

- Ranger des nombres par **ordre croissant**, c'est les ranger du plus petit au plus grand, pour cela on utilise le signe <.
- Ranger des nombres par **ordre décroissant**, c'est les ranger du plus grand au plus petit, pour cela on utilise le signe >.

Exemple :

On veut ranger les 5 nombres décimaux suivants : 14,3   11,72   17,9   11,9   14,89

Rangement dans l'ordre croissant : 11,72 < 11,9 < 14,3 < 14,89 < 17,9

Rangement dans l'ordre décroissant : 17,9 > 14,89 > 14,3 > 11,9 > 11,72

Remarque :

Les symboles de comparaison sont introduits par l'anglais Thomas Harriot (XVIème siècle).
Dans *inférieur* on retrouve le mot « enfer », ces deux mots trouvent leur origine dans la racine latine « inferus » qui signifie « en bas ».

III. Encadrer-Intercaler-Arrondir

1) Encadrer

Définition 4 :

Encadrer un nombre, c'est trouver deux nombres, l'un plus petit, l'autre plus grand.
La différence entre ces deux nombres est l'amplitude de l'encadrement.

Exemple :

- 10 < 27,923 < 100 est un encadrement de 27,923 d'amplitude 100 – 10 = 90.

- On peut préciser l'encadrement : 23 < 23,832 < 24 est un encadrement à **l'unité** (d'amplitude 1) parce que 23 et 24 sont deux nombres entiers et ils sont consécutifs.

- 23,8 < 23,832 < 23,9 est un encadrement au dixième (d'amplitude 0,1) parce que 23,8 et 23,9 ont un seul chiffre après la virgule et ils sont consécutifs lorsqu'on compte de dixième en dixième.

2) Intercaler

Définition 5 :

Intercaler un nombre entre deux autres nombres, c'est trouver un nombre compris entre ces deux nombres.

Exemple :

Entre 12,4 et 12,5, on peut intercaler les nombres 12,41 ou 12,423 ou 12,465 etc…

Remarque :

- On peut toujours intercaler un nombre fini de nombres entiers entre deux nombres entiers.

- Entre deux nombres décimaux (si proches soient-ils), il est toujours possible d'intercaler un nombre infini de nombres décimaux. Entre 17 et 18, on peut, par exemple, situer 17, 4 ; 17,46 ; 17, 465 ; 17,4651…

3) Arrondir

Définition 6 :

On dit qu'un nombre est une valeur approchée d'un autre nombre au centième si la différence entre ces deux nombres ne dépasse pas un centième, soit 0,01.

Remarque :

On peut remplacer dans cette définition 0,01 par 0,1 ou par 1 pour donner des valeurs approchées au dixième près ou à l'unité près.

Exemple :

1,5 est une valeur approchée de 1,503 à 0,01 près car 1,503 – 1,5 = 0,003 et 0,003 < 0,01
1,51 est une autre valeur approchée de 1,503 à 0,01 près car 1,51 – 1,503 = 0,007 et 0,007 < 0,01
Si on veut une valeur approchée de 1,503 à 0,1 près, on peut prendre 1,5 ou 1,51 mais aussi 1,6 car 1,6 – 1,503 = 0,097 et 0,097 < 0,1.
Par contre, 1,6 n'est pas une valeur approchée de 1,503 à 0,01 près.

Définition 7 :

L'arrondi d'un nombre décimal au centième le plus proche (on dit aussi à deux chiffres) est le nombre à deux chiffres après la virgule le plus proche du nombre décimal.
De même on définit l'arrondi au dixième le plus proche ou l'arrondi à l'entier le plus proche, etc.

Exemples :

L'arrondi au centième le plus proche de 1,503 est 1,50 ou 1,5. (C'est une valeur approchée par défaut.)
L'arrondi au dixième le plus proche de 1,503 est aussi 1,5.
L'arrondi à l'unité la plus proche de 1,503 est 2 car on est plus proche de 2 que de 1 (c'est une valeur approchée par excès).

16,0…
16,1…
16,2…
16,3…
16,4…
s'arrondissent à 16 à l'unité parce qu'ils sont plus proches de 16 que de 17.

16,5…
16,6…
16,7…
16,8…
16,9…
s'arrondissent à 17 à l'unité parce qu'ils sont plus proche de 17 que de 16.

Arrondi de 16,924 au dixième : 16,9 (16,924 est plus proche de 16,9 que de 17).
Arrondi de 16,385 au dixième : 16,4 (16,385 est plus proche de 16,4 que de 16,3).
Arrondi de 9,531 au centième : 9,53 (9,531 est plus proche de 9,53 que de 9,54)

Les figures usuelles

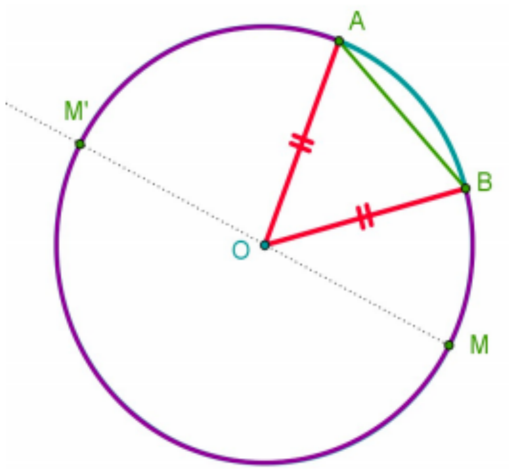
I. Le cercle

Définition 1 :

Le cercle de centre O passant par M est l'ensemble des points situés à la distance r = OM du point O. Cette distance r est appelée « rayon » du cercle et on peut noter ce cercle $\wp(O,r)$.

Remarque :

Le mot rayon vient du latin « radius » et n'apparaît qu'au milieu du XVIè siècle puis est généralisé par le mathématicien François Viète en 1590.
Le mot cercle vient du latin « circulus » dérivé de circus, cercle a la même étymologie que le mot cirque et on parle de de circulus dés le XIIè siècle.



Attention :

[OM] est un segment qui joint le centre du cercle et un point du cercle, c'est donc un rayon du cercle.

OM est la longueur de [OM], donc la distance entre O et M, ce nombre est aussi appelé rayon du cercle.

Un rayon de cercle est donc un segment mais c'est aussi un nombre (la longueur de ce segment).

Remarque :

Un cercle est l'ensemble des points équidistants d'un point donné.
Si un point P appartient au cercle de centre O passant par M alors OM = OP.

Définition 2 :

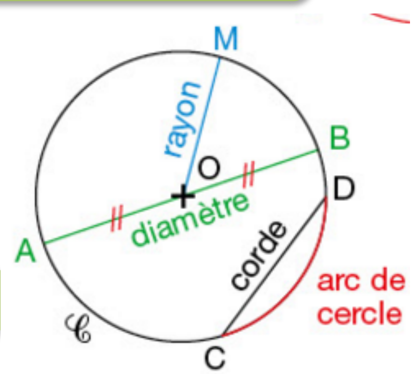
Le segment [AB] qui rejoint deux points A et B d'un même cercle est appelé corde du cercle.
La portion du cercle comprise entre A et B s'appelle l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

Remarque :

Il y a deux arcs de cercle $\overset{\frown}{AB}$: le petit et le grand.

Définition 3 :

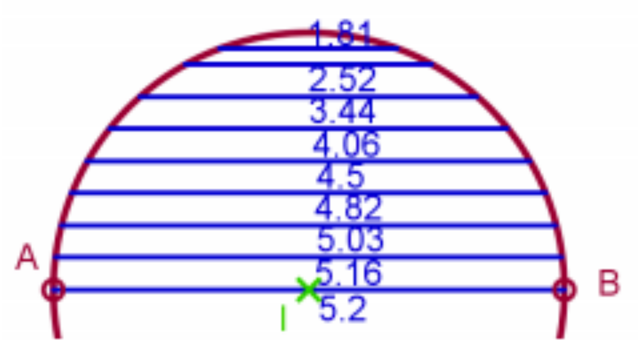
Un diamètre d'un cercle est une corde qui passe par le centre du cercle.



Remarque :

Pour un cercle de centre O passant par M, la demi-droite [MO) recoupe le cercle en un point M' qu'on dit « diamétralement opposé » à M sur le cercle.
Le segment [MM'] est un diamètre du cercle.
La longueur MM' est aussi appelée diamètre du cercle.

Les diamètres d'un cercle sont les plus longues cordes possibles du cercle. Ils sont en nombre infini et chacun des diamètres partage le cercle en deux arcs de cercle de même longueur qu'on appelle des demi-cercles.



Le milieu d'un diamètre est le centre du cercle.

Propriété 1 :

La longueur d'un cercle est proportionnelle au diamètre du cercle.
Cette longueur aussi appelée circonférence ou périmètre du cercle vaut exactement $\pi \times diamètre$ où π est un nombre qui vaut environ 3,14.

Exemple :

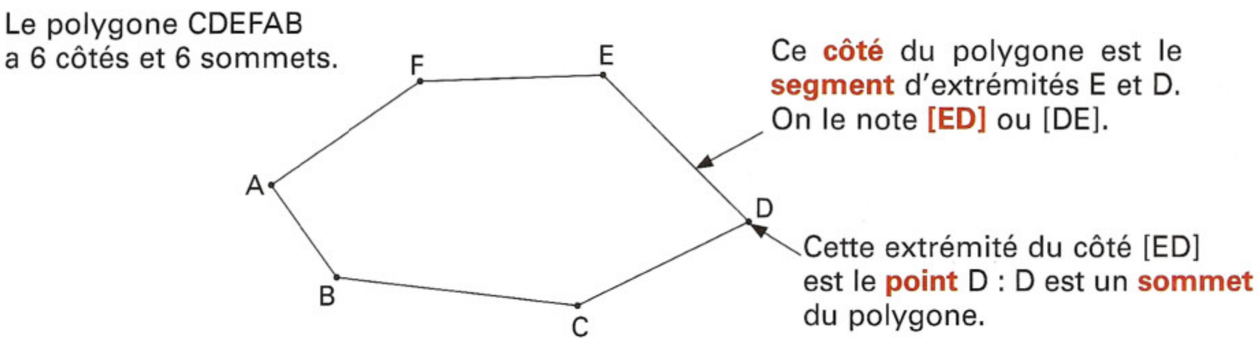
Un cercle de diamètre 10 cm (de rayon 5 cm) a une circonférence de 31,4 cm environ.

II. Les polygones

Polygone est un mot composé du préfixe poly signifiant « plusieurs » et « gones » qui veut dire « angles ». Ce mot est apparu en 1567 dans la langue française.

Définition 4 :

Un polygone est une figure plane fermée, formée de segments consécutifs mis bout à bouts.
Ces segments sont appelés les côtés du polygone et les extrémités des côtés sont appelées les sommets du polygone.



• Pour nommer un polygone, on donne la liste de ses sommets en respectant l'ordre dans lequel on les trouve en « faisant le tour » du polygone. Un polygone a donc plusieurs noms : le polygone ci-dessus s'appelle aussi ABCDEF ou EDCBAF, etc.

• Deux côtés sont consécutifs s'ils ont une extrémité commune : par exemple [ED] et [DC].

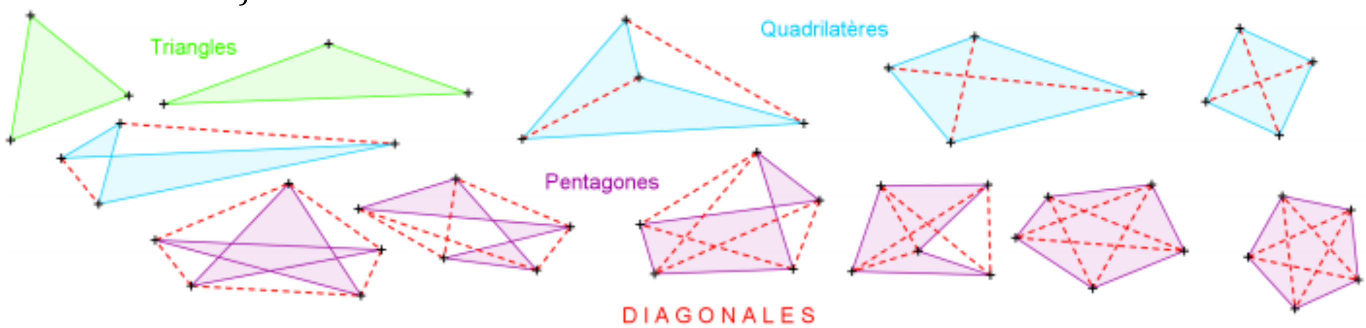
Définition 5 :

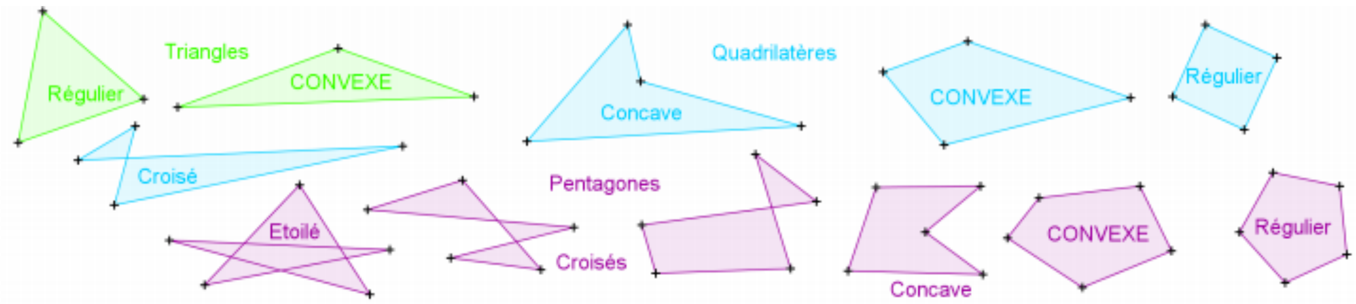
Une diagonale est un segment joignant 2 sommets et qui ne soit pas un côté.

Remarque :

- Un polygone qui a 3 côtés (un triangle) n'a pas de diagonale et un polygone à 4 côtés (quadrilatère) en a 2.

- Lorsque les diagonales d'un quadrilatère sont à l'intérieur du quadrilatère, ce quadrilatère est dit « convexe » (du latin convexus qui signifie « vouté » ou « arrondi »).
  S'il n'est pas convexe, le quadrilatère peut être « concave » (avec un creux) ou croisé (deux de ses côtés se coupent).
- A partir de 5 côtés, un polygone peut être étoilé (les côtés se coupent d'un maximum de façons différentes).





Selon le nombre de sommets, on distingue :

Nom du polygone	*Nombre de côtés*	*Nombre de diagonales*	*Cas particuliers*
Triangle	3	0	isocèle, équilatéral, rectangle
Quadrilatère	4	2	rectangle, losange, carré, cerf-volant, parallélogramme, trapèze, concave, croisé
Pentagone	5	5	régulier, convexe, croisé, étoilé
Hexagone	6	9	régulier, convexe, croisé
(Heptagone)	7	14	régulier, convexe, 2 étoilés différents
Octogone	8	20	régulier, convexe, croisé
(Ennéagone)	9	27	régulier, convexe, 2 étoilés
Décagone	10	35	régulier, convexe, étoilé
(Hendécagone)	11	44	régulier; convexe, 4 étoilés différents
Dodécagone	12	54	régulier, convexe, étoilé
(n-gone)	n	$n\times(n-3)/2$	

Définition 6 :

Un polygone est dit régulier si tous ses côtés ont la même longueur et si tous ses sommets sont sur un même cercle.

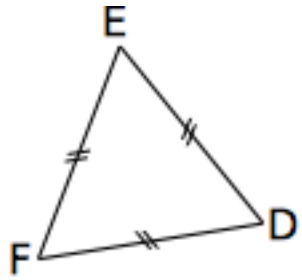
III. Les triangles

L'étymologie insiste sur les angles du triangle- les Grecs l'appelaient aussi trigone mais c'est à partir du sens « ancien » du mot quand angle signifiait à la fois grandeur et figure, ce qui fait que l'équivalent de triangle aujourd'hui serait « tri-secteur ».
Mais les Grecs l'ont aussi appelé « trilatère » (comme quadrilatère). Si la terminologie hésite entre côtés et angles, c'est que selon les cas, tantôt les uns, tantôt les autres affectent plus la forme du triangle et donc la vision que l'on en a.

1) Triangle équilatéral

Définition 7 :

Un triangle équilatéral est un triangle qui a 3 côtés de même longueur.



Remarques :

- Un triangle équilatéral est un polygone régulier à 3 côtés
- Les angles d'un triangle équilatéral sont tous les trois égaux à 60°.

2) Triangle isocèle

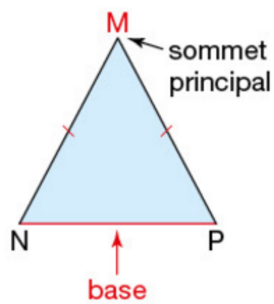
Définition 8 :

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur.

Remarque :

Le mot « isocèle » vient du latin isoceles, du grec isokêles, de « isos » qui signifie « égal » et « skelos » qui veut dire « jambes ».
Un triangle isocèle est donc un triangle qui a deux « jambes » égales.

Exemple :

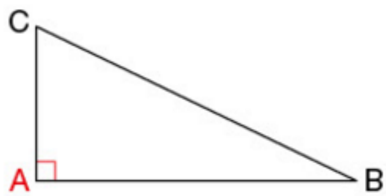


- On dit que le triangle MNP est isocèle de sommet principal M car MN = MP
- [NP] est appelé la base du triangle isocèle (c'est le côté à l'opposé du sommet principal)
- Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de mêmes mesures

3) Triangle rectangle

Définition 9 :

Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit (90°).

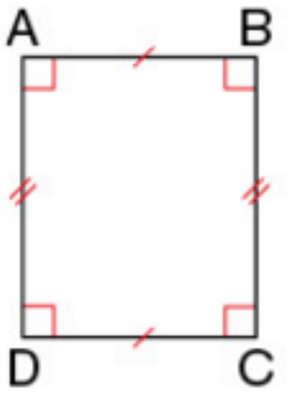


Remarque :

- Le côté [BC] à l'opposé de l'angle droit est appelé l'hypoténuse
- Les deux autres angles d'un triangle rectangle sont complémentaires (la somme de leur mesure est égale à 90°)

- un triangle qui n'est ni rectangle, ni isocèle, ni équilatéral est dit « quelconque » ou « scalène » (du grec « scalenos » qui signifie « d'apparence boiteuse »).

III. Les quadrilatères particuliers



1) Le rectangle

Du latin médiéval « rectangulus », comosé de rectus, qui veut dire droit et de angulus qui signifie « angle ».

Définition 10 :

Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Propriété 2 :

Si un quadrilatère a trois angles droits alors c'est un rectangle.

Remarque :

Cette propriété sert à montrer qu'un quadrilatère est un rectangle.

Propriété 3 :

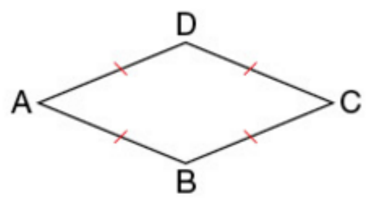
Un rectangle a ses côtés opposés de la même longueur.

2) Le losange

D'un mot gaulois « lausa » désignant une pierre plate, une dalle en ancien provençal et losa signifie « dalle » ou « carreau » en espagnol.

Définition 11 :

Un losange est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur



Remarque :

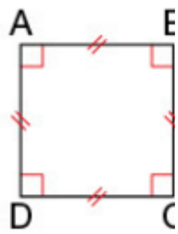
Les diagonales d'un losange se coupent perpendiculairement (en formant un angle droit).

3) Le carré

Du latin « quadratus » qui signifie « part ». en latin « quadrare » veut dire « rendre carré ».

Définition 12:

Un carré est un quadrilatère qui a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.



Remarque :

Le carré a toutes les « particularités » du rectangle et du losange.

4) <u>Le parallélogramme</u>

Définition 13 :

Un parallélogramme est un quadrilatère (non croisé) qui a ses côtés opposés parallèles

Remarque :

Le carré, le rectangle et le losange sont des parallélogrammes particuliers.

Addition-Soustraction- Multiplication

Ce que je dois savoir et savoir faire à la fin de cette leçon

- Connaître le vocabulaire se rapportant à l’addition, à la soustraction et à la multiplication.
- Calculer une somme, une différence ou un produit en la posant en colonne.
- Calculer une somme ou une différence en ligne.
- Utiliser des techniques de calcul habile, de calcul mental.
- Additionner ou soustraire des fractions décimales.
- Donner un ordre de grandeur d’un somme, d’une différence ou d’un produit.
- Résoudre des problèmes mettant en jeu des additions, des soustractions et des produits (et savoir présenter les solutions correctement).

I. L'addition

1) Définition-Vocabulaire

Définition 1 :

Effectuer l'**addition** de deux nombres, c'est calculer la **somme** de ces deux nombres.
La **somme** est donc le **résultat de l'addition.**
Chacun des **nombres que l'on additionne** est appelé **un terme** de la somme.

Exemple :

24,5 + 0,8 = 25,3 On dit que 25,3 est la somme des termes 24,5 et 0,8.

Les termes

La somme

2) Propriétés

Propriété 1 :

Lorsqu'on calcule une somme de plusieurs termes, on peut :

- changer l'ordre des termes : c'est la **commutativité** de l'addition
- regrouper différemment les termes (cela permet de simplifier le calcul mental) : c'est l'**associativité** de l'addition
- 0 ajouté à n'importe quel nombre ne change pas ce nombre (0 est **l'élément neutre** de l'addition)

Exemples :

$$A = 14,7 + 35 + 4,3 + 65$$
$$A = 14,7 + 4,3 + 35 + 65$$
$$A = 19 + 100$$
$$A = 119$$

$$18 + 0 = 0 + 18 = 18$$

II. La soustraction

1) Définition-Vocabulaire

Définition 2 :

Effectuer la **soustraction** de deux nombres c'est calculer la **différence** de ces deux nombres.
La **différence** est donc le **résultat de la soustraction**.
Chacun des **nombres que l'on soustrait** est appelé **terme** de la différence. (Comme pour la somme)

Exemple :

$30 - 2,5 = 27,5$ On dit que 27,5 est la différence des termes 30 et 2,5.

Les termes

La différence

2) Propriétés

On ne peut pas changer l'ordre des termes dans une soustraction ni les regrouper comme on le souhaite: la soustraction n'est ni commutative ni associative

Exemples :

$18-5 \neq 5-18$ (Soustraction non commutative)

$12-(5-3)=12-2=10$ ET $(12-5)-3=7-3=4$ (Soustraction n'est pas associative)

Remarque :

Les mots : enlever ; retrancher ; ôter sont des synonymes du mot soustraire.

Exemple :

7 retranché de 13 ou bien retrancher 7 à 13 c'est effectuer l'opération $13-7=6$.

III. La multiplication

1) Définition-Vocabulaire

Définition 3 :

La **multiplication** est l'opération qui permet de calculer le **produit** de deux nombres qui sont appelés **facteurs**.
Le **produit** est donc le **résultat** de la **multiplication**.
Les **nombres que l'on multiplie** sont appelés **facteurs**.

Remarque :

Le mot « Facteur » vient du latin « factor » qui signifie « celui qui est fait ».

Exemple :

$\underbrace{6{,}4 \times 2}_{\text{Les facteurs}} = 12{,}8$ On dit que 12,8 est le produit des facteurs 6,4 et 2.

Le produit

2) Propriétés

Propriété 2 :

Dans une multiplication de plusieurs facteurs, on peut :

- Changer l'ordre des facteurs : la **multiplication est commutative**
- Regrouper différemment les facteurs : la **multiplication est associative**
- Décomposer des facteurs
- 1 multiplié à n'importe quel nombre ne change pas ce nombre (**1 est l'élément neutre de la multiplication**).

Exemples :

$B = 2{,}5 \times 35 \times 2$

$B = 2{,}5 \times 2 \times 35$ → commutativité

$B = 5 \times 35$ → associativité

$B = 175$

$7{,}3 \times 1 = 1 \times 7{,}3 = 7{,}3$ → 1 est l'élément neutre de la multiplication.

3) Multiplication par 10 ; 100 ; 1000

Propriété 3 :

Quand on multiplie un nombre par :

- **10** on déplace la virgule de **1 rang vers la droite**, au besoin on rajoute un zéro ou on enlève la virgule.
  Le chiffre des **unités** devient alors le chiffre des **dizaines**.
- **100** on déplace la virgule de **2 rang vers la droite**, au besoin on rajoute un zéro ou on enlève la virgule.
  Le chiffre des **unités** devient alors le chiffre des **centaines**.
- **1000** on déplace la virgule de **3 rangs vers la droite**, au besoin on rajoute un zéro ou on enlève la virgule.
  Le chiffre des **unités** devient alors le chiffre des **milliers.**

Exemples :

$51{,}32 \times 10 = 513{,}2$ $\quad$ $0{,}9 \times 100 = 90$ $\quad$ $2{,}097 \times 100 = 209{,}7$

Remarques :

On peut aussi ajouter les multiplications par 0,1 ; 0,01 ; 0,001...etc.
0,1 c'est 1 dixième et donc **multiplier par 0,1 c'est diviser par 10** et cela revient à décaler la virgule de **1 rang vers la gauche**.
Le chiffre des **unités** devient alors celui des **dixièmes**.
De même multiplier par **0,0**1 c'est diviser par 100 et cela revient à décaler la virgule de **2 rangs vers la gauche** et le chiffre des **unités** devient celui des **centièmes**.
Multiplier par **0,00**1, c'est diviser par 1000 et cela revient à décaler la virgule de **3 rangs vers la gauche**, le chiffre des **unités** devenant celui des **millièmes**.

Exemple :

$45{,}6 \times 0{,}01 = 0{,}456$

4) Multiplication des nombres décimaux

Propriété 4 :

Pour effectuer le produit de deux nombres décimaux, on ne se préoccupe pas des virgules (on effectue le produit de deux nombres entiers) puis on place la virgule dans le résultat de manière à avoir autant de chiffres après la virgule qu'on en avait au total au départ.

Exemple :

Pour calculer le produit : $57{,}3\times1{,}87$ on calcule le produit 573×187 puis on place la virgule.
$573\times187=107\ 151$ or il y a 1 + 2 chiffres après la virgule dans le produit $57{,}3\times1{,}87$, il doit donc y avoir 3 chiffres après la virgule dans le résultat d'où $57{,}3\times1{,}87=107{,}151$.

5) Priorités opératoires

Propriété 5 :

Les calculs entre parenthèses sont prioritaires.
La multiplication est prioritaire sur les additions et les soustractions.

Exemples :

$A=14-(2{,}5+3{,}5)$	$B=2{,}5\times4+1$
$A=14-6$	$B=10+1$
$A=8$	$B=11$

IV. Les techniques opératoires

1) Le calcul posé

Il est nécessaire lorsqu'on pose une addition ou une soustraction en colonne de positionner les nombres de manière à ajouter unités avec unités, dixièmes avec dixièmes,etc.
Le meilleur moyen est de repérer la place de la virgule ou le chiffre des unités.

On commence toujours par les chiffres les plus à droite pour gérer correctement les retenues.

S'il s'agit de soustraction, on enlève toujours le chiffre du bas à celui du haut (jamais l'inverse).
Cela amène parfois une retenue, comme dans l'exemple posé $12-1{,}6$: pour connaître le chiffre des dixièmes, on ne peut pas enlever 6 à 0 alors on enlève 6 à 10, ce qui donne ‘ dixièmes avec une retenue de 1 unité.
Cette retenue est ajoutée au chiffre des unités du nombre du dessous (ou retranchée au chiffre des unités du nombre en dessus, ce qui revient évidemment au même).
Dans notre exemple, cela revient à effectuer $12-2$ ou bien $11-1$.

Comment poser une addition ?

Lorsqu'on effectue une addition :
- on place les virgules sous les virgules
- on additionne les unités avec les unités, les dixièmes avec les dixièmes, etc…
- on n'oublie pas les retenues.

Exemple :

$$\begin{array}{rrl} & 146, & 0 \\ + & 37, & 9 \\ \hline & 183, & 9 \end{array}$$

Comment poser une soustraction ?

Lorsqu'on effectue une soustraction :
- on place les virgules sous les virgules
- on soustrait les unités avec les unités, les dixièmes avec les dixièmes, etc…
- on n'oublie pas les retenues.

Exemple :

$$\begin{array}{rrl} & 19, & 30 \\ - & 4, & 82 \\ \hline & 14, & 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 12 \\ + & 1{,}5 \\ \hline & 13{,}5 \end{array}$$

La virgule n'est pas toujours présente (entier)

$$\begin{array}{rr} & 19{,}35 \\ + & 7{,}9 \\ \hline & 27{,}25 \end{array}$$

Attention aux retenues !

Remarque concernant les durées :

Les retenues dépendent du système de numération utilisé.
Dans notre système décimal, on retient des dizaines, des centaines, etc...
Dans le système sexagésimal (base 60) des babyloniens utilisé pour mesurer les durées (les minutes, et secondes font une retenue lorsqu'il y en a soixante), on retient donc d'une façon particulière : lorsqu'on dépasse 60 minutes (et non 100 !) on retient une heure.
De même dépasser 60 secondes conduit à retenir 1 minute :

1h 35' 47''	1h 35' 47''	**1**h **35**' 47''
+2h 12' 56''	+2h 46' 15''	− 0h 57' 12''
3h 47' **93''**	3h **81' 62''**	0h 38' 35''
3h **48' 33''**	**4h 22' 02''**	*Pour les soustractions on doit parfois retirer des soixantaines..*

Le plus simple, pour les additions de durées, est de calculer dans un premier temps, séparément, les nombres de secondes, de minutes et d'heures.
Dans un second temps, on s'occupe de reporter les retenues entre ces différentes catégories de durées.
Sur le 1^{er} exemple, on obtient 3h 47' 93'' mais le nombre de secondes ne pouvant pas dépasser 50, on enlève 60 à 93 ce qui donne 33 secondes et on reporte une minute en retenue.

Pour soustraire des durées, le principe est le même, mais il faut l'appliquer à l'envers : quand on ne peut pas enlever à un nombre suffisant, on commence par ajouter 60 à ce nombre et on reporte la retenue sur la catégorie supérieure. Pour enlever 0h 57' 12'' à 1h 35' 47'' comme ci-dessus à droite, on ne peut pas enlever 57 minutes à 35, donc on ajoute 60 à 35, ce qui fait 95, et on enlève 57 minutes à 95, ce qui fait 38. On n'oublie pas ensuite de traiter les heures avec une retenue de 1, ce qui fait 0−0 ou 1−1, soit 0h.

Comment poser une multiplication ?

Lorsqu'on effectue une multiplication :
- On multiplie le premier nombre par chaque chiffre du second, en commençant par la droite (attention aux retenues)
- On écrit les produits intermédiaires en décalant à chaque fois d'un rang vers la gauche.
- On fait la somme
- On place la virgule (après avoir calculé le nombre total de chiffres après la virgule des deux facteurs).

Exemple :

		4,	3	2
×			3,	8
	3	4	5	6
+ 1	2	9	6	.
	1	6,	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>6</u>

3 chiffres après la virgule dans les deux facteurs

Il y a donc 3 chiffres après la virgule au résultat

2) Le calcul mental

Ce qu'il faut savoir par cœur : Les tables d'additions ne doivent pas être retrouvée avec les doigts, il faut les apprendre par cœur !
Pour les soustractions, ce sont les mêmes tables mais utilises différemment.

Ce qu'il faut avoir travaillé pour être efficace : Les compléments à 10, 100 et 1000 sont nécessaires aussi dans la pratique : combien ajouter à 37 pour faire 100 ? 63 car 63+37 = 100. 63 est appelé le complément à 100 de 37. Cette notion permet de calculer de tête facilement 100-37 = 63 ou aussi en passant aux centièmes, 1- 0,37 = 0,63.

3) Le calcul instrumenté

La calculatrice, l'ordinateur, la règle à calculer, le boulier sont des instruments de calculs, des machines qui sont programmées ou construites pour exécuter ou faciliter l'exécution des calculs. Notre objectif n'est pas ici d'apprendre à utiliser un ordinateur ou un boulier, mais on peut dire quelques mots sur ces outils.

Les calculatrices savent exécuter n'importe quelle addition ou soustraction pourvu qu'on respecte ses limitations : le nombre de chiffres affichés ne dépasse pas 12 ou 13.
Pour les nombres qui contiennent trop de chiffres, les résultats sont arrondis et l'affichage parfois utilise une écriture qu'on n'étudie qu'en classe de 4ème : la notation scientifique.
Par exemple, le nombre 130 000 000 000 000 qui contient 15 chiffres ne sera pas affiché ainsi (cela ne rentrerai pas sur l'écran) mais sera affiché sous la forme 1,3×1014 qui signifie que l'on doit multiplier 1,3 par 1014=100 000 000 000 000 (1 suivi de 14 zéros). Un autre exemple, le nombre 0,000 000 000 004 56 qui contient 15 chiffres ne sera pas non plus affiché ainsi, mais sera affiché sous la forme 4,56×10−12 qui signifie que l'on doit multiplier 4,56 par 10−12=0,000 000 000 001 (1 précédé de 12 zéros, en comptant le zéro des unités) ou que l'on doit diviser 4,56 par 1012=1 000 000 000 000.
Une 2ème remarque concernant la calculatrice : celle-ci ne sait pas qu'en 6ème on ne connait pas encore les nombres négatifs (ils seront étudiés en 5ème). Pour elle, le calcul 5−12 n'a rien d'impossible et elle affichera le résultat −7 qui est un nombre négatif, précédé du signe « moins » (noté −). Ces nombres complèteront les ensembles de nombres connus jusqu'à présent (entiers, décimaux, fractions).

V. Ordre de grandeur

Avant d'effectuer un calcul (mental, à la main ou à la machine), il est toujours préférable connaître un ordre de grandeur du résultat.

MÉTHODE :
Pour obtenir un ordre de grandeur d'une somme ou d'une différence :
-> On remplace chacun des termes par un autre nombre à la fois proche et facile à utiliser en calcul mental ;
-> On effectue l'addition, la soustraction ou la multiplication avec ces nombres ;
-> On obtient un résultat proche du résultat exact ;

Ce nombre est un ordre de grandeur de la somme, de la différence ou du produit.

Exemple :

On cherche un ordre de grandeur de 1 348,7 + 201,9.
1 348,5 est proche de 1 350 et 201,9 est proche de 200. On a 1 350 + 200 = 1 550
Un ordre de grandeur de 1 348,7 + 201,9 est donc 1 550.

Organisation et gestion de données

I. Les différents types de tableaux

1) Tableau à deux lignes ou deux colonnes

Un tableau permet de présenter des données de façon claire, de lire facilement des informations.

Exemple 1 :

On a posé la question dans la classe : « Es-tu une fille ou un garçon ? »

……….. élèves sont des filles et ……… sont des garçons.

Ces réponses peuvent être présentées dans un ………………

Sexe	**Filles**	**Garçons**
Nombre d'élèves		

Il y a ……….. élèves dans la classe.

On dit que l'effectif de la classe est ………

Exemple 2 :

Fleuve	**Longueur (en km)**
Garonne	647
Loire	1 012
Rhône	812
Seine	776

Cette ligne indique que la longueur de la Seine est de 776 km.

2) Tableau à double entrée

On a posé la question dans la classe : « Es-tu demi-pensionnaire ou externe ? »

On veut distinguer le nombre de filles demi pensionnaires ou externes et le nombre de garçons demi-pensionnaires ou externes.

Pour cela on utilise ………………………………………………………..

Régime \ Sexe	**Filles**	**Garçons**	**Total**
Demi-pensionnaires			
Externes			
Total			

Interprétations :

- La colonne grise claire donne la répartition d'élèves garçons entre demi-pensionnaires ou externes.
- La ligne grise foncée donne la répartition des externes de cette classe entre filles et garçons.
- Le ……… de la case encadrée qui est sur la ligne « externe » et sur la colonne « garçons » signifie que …….. élèves garçons de cette classe sont externes.

- On retrouve bien qu'il y a ….. garçons dans cette classe.
- Il y a ……. filles demi-pensionnaires.
- Il y a ……. externes en tout.

II. Les représentations graphiques

Diagramme vient du latin diagramma qui signifie « dessin ».

1) Le diagramme en bâton (ou à barres)

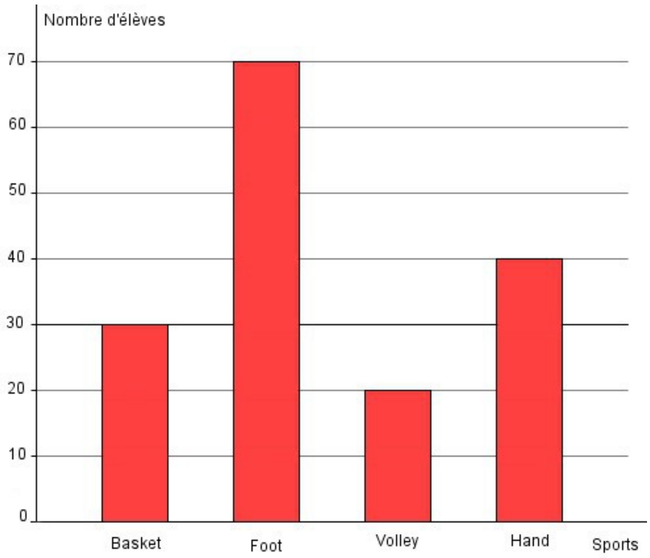
On utilise ce type de diagramme pour représenter des données numériques peu nombreuses. Ce type de diagramme permet de comparer facilement des données.

Propriété 1 :

Dans un diagramme en bâtons, les hauteurs des bâtons sont **proportionnelles** aux nombres qu'ils représentent.

Exemple :

On a relevé le nombre d'élèves qui pratiquent des sports dans une association sportive.
Le diagramme en bâtons ci-dessous regroupe ces informations.



- Sur l'axe horizontal, on lit le nom du sport pratiqué.
- Sur l'axe vertical, on lit le nombre d'élèves qui pratiquent ce sport.
- Le deuxième bâton indique que 70 élèves pratiquent le foot.

2) Diagramme circulaire ou semi-circulaire

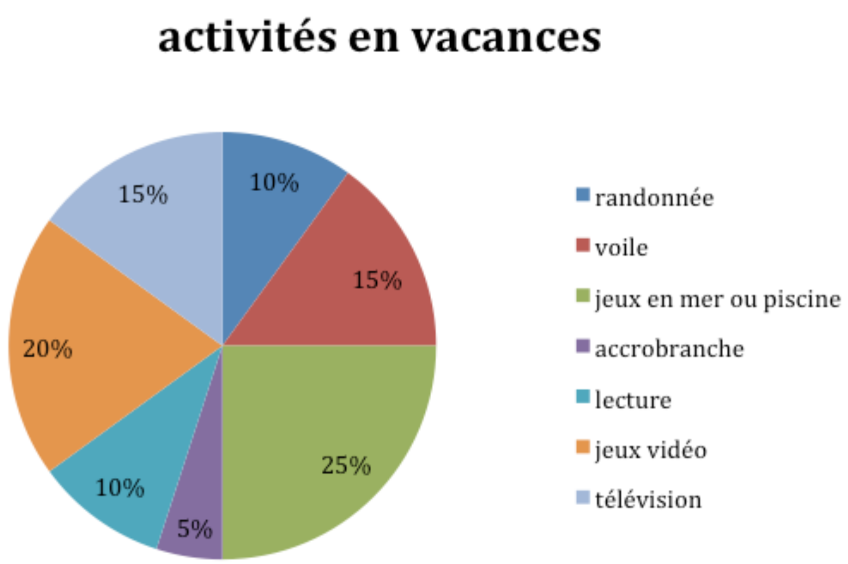
On utilise ce type de diagramme pour représenter des données non numériques.
Ce type de diagramme permet de mettre en évidence la répartition des données selon plusieurs catégories.

Propriété 2 :

Dans un diagramme circulaire (ou semi-circulaire), les mesures des angles sont proportionnelles aux nombres ou aux pourcentages qu'ils représentent.

Exemple :

On a demandé à des jeunes collégiens quelles étaient leurs activités en vacances et voici leurs réponses :



<u>Méthode de construction d'un diagramme circulaire :</u>

Le but est de connaître en degrés la part du disque.

Puisque <u>l'ensemble du disque</u> équivaut à 100% (ou à la somme des nombres)

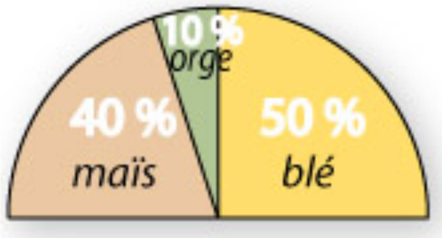
360° équivalent à 100% (ou à la somme des nombres) donc 1% équivaut à 3.6°
(ou bien une unité équivaut à 360° / somme des nombres)

Il faudra donc multiplier chaque pourcentage par 3.6 pour connaître la mesure de l'angle qui représentera la proportion.

Par exemple, la part correspondant aux jeux vidéos correspond à un angle de 20 x 3,6 = 72°.

<u>Exemple de diagramme semi-circulaire :</u>

Répartition de la production en céréales d'un agriculteur.

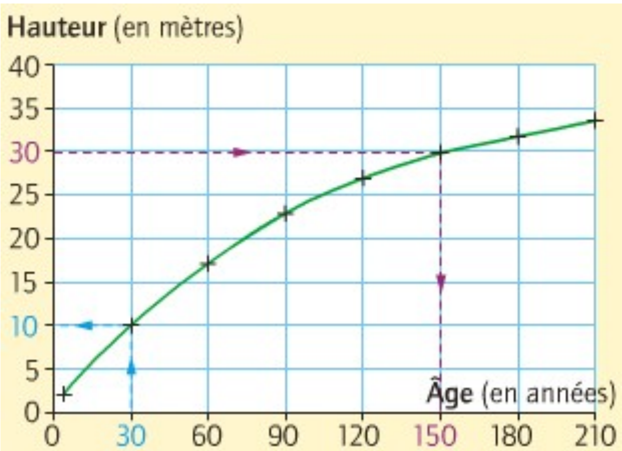


3) <u>Graphique cartésien</u>

On utilise un graphique cartésien pour représenter l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre.
Ils sont souvent utilisés pour étudier l'évolution d'une grandeur dans le temps.

<u>Exemple :</u>

Le graphique ci-dessous donne la hauteur d'un chêne en fonction de son âge.



- Sur l'axe horizontal, on lit l'âge d'un chêne, et sur cet axe, 1 carreau représente 30 années.
- Sur l'axe vertical, on lit la hauteur d'un chêne, et sur cet axe, 1 carreau représente 5 m.
- Les flèches bleues indiquent qu'un chêne de 30 ans mesure 10 m.
- Les flèches vertes indiquent qu'un chêne de 30 m a 150 ans.

Les angles

I. Notation et vocabulaire

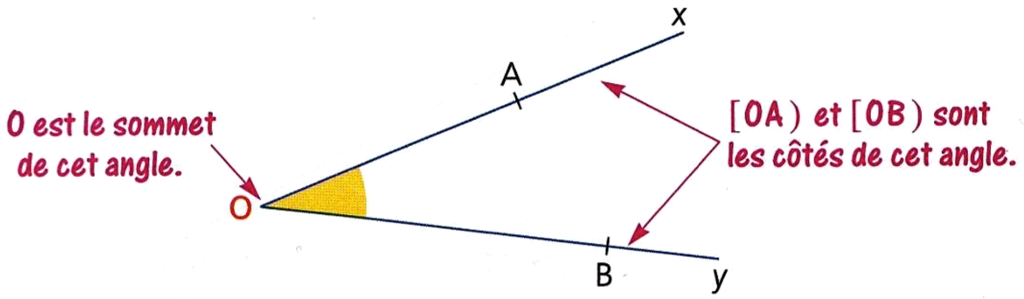
Définition 1 :

On appelle angle l'ouverture formée par deux demi-droites de même origine.

Cette origine s'appelle le sommet de l'angle
Ces deux demi-droites s'appellent les côtés de l'angle.

Exemples :

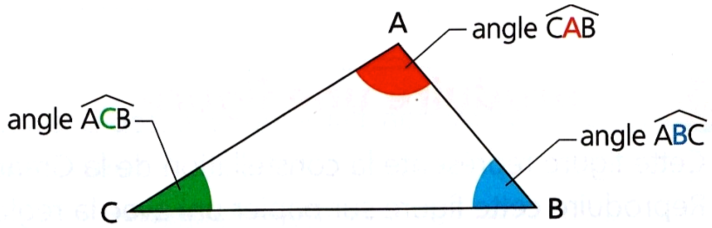
- Sur une figure, on marque d'un codage un angle par un petit arc de cercle qui a pour centre le sommet de l'angle.



- Un angle se note à l'aide de trois lettres : le sommet s'écrit toujours au milieu.
  L'angle ci-dessus se note donc $\widehat{AOB}$ ou bien encore $\widehat{BOA}$ ou $\widehat{xOy}$ ou $\widehat{yOx}$.

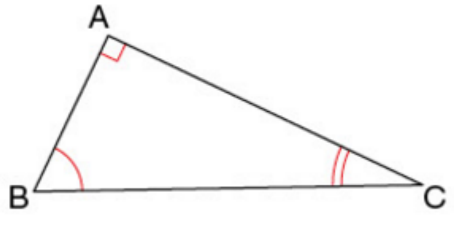
  [OA) (ou [Ox)) et [OB) (ou [Oy)) sont les côtés de l'angle.

- Angles dans un triangle



Remarque :

- On place un petit carré au lieu d'un arc de cercle pour symboliser un angle droit.
- Lorsque deux angles sont codés de la même façon, cela signifie qu'ils ont la même mesure.



II. Mesure d’un angle

1) Unité : le degré

Le grec, Thalès de Milet (-624 ; -548) considérait que l’angle était la 4è mesure géométrique après la longueur, la surface et le volume.

Comme pour les longueurs, pour pouvoir comparer les angles à l’aide de nombres, il faut choisir une unité. Depuis plus de 4 000 ans, l’unité usuelle d’angle est le **degré** noté « ° ».

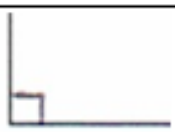
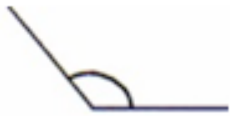
Notation : lorsque la mesure de l’angle $\widehat{ABC}$ est égale à 40°, on note : $\widehat{ABC} = 40°$.

Remarques :

Le degré est défini à partir de la mesure d’un angle droit : un angle droit mesure 90°.
Le degré est donc la $90^{ème}$ partie d’un angle droit.
Voici un angle de 1° :

Un tour contient 4 angles droits, donc un tour mesure 360°.
Le degré est donc vraisemblablement en relation avec l’usage babylonien de compter par soixantaine, et aussi au fait qu’il y ait approximativement 360 jours dans une année...
La tentative révolutionnaire d’introduire une unité décimale (base 10 au lieu de base 60) pour mesurer les angles a conduit au grade. Un angle droit mesure donc 100 grades.

2) Classification des angles par rapport à l’angle droit

					
Angle	**nul**	**aigu**	**droit**	**obtus**	**plat**
Mesure	égale à **0°**	comprise entre **0° et 90°**	égale à **90°**	comprise entre **90° et 180°**	égale à **180°**

Remarque :

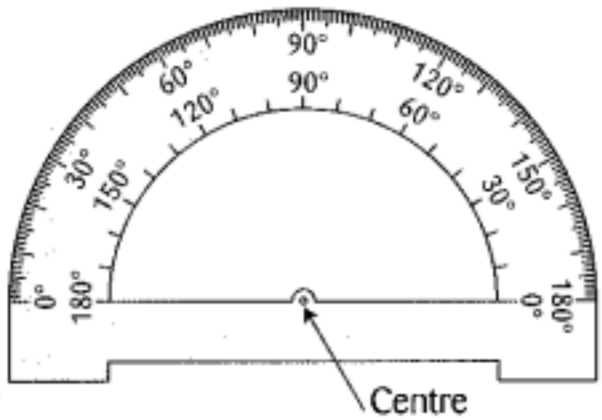
On peut aussi classer les triangles selon leurs angles, ainsi on parle de **triangles acutangles** (qui n’ont que des angles aigus) et de **triangles obtusangles** (qui ont un angle obtus).
Entre les deux, on trouve le **triangle rectangle** (qui a un angle droit).

III. Le rapporteur

1) Mesurer un angle

Pour mesurer un angle, on utilise un rapporteur qui est souvent sous la forme d'un demi-disque gradué de 0° à 180°.

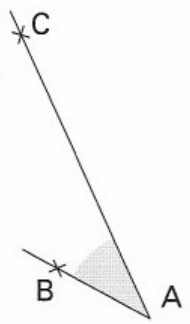
1ère étape : On place le centre du rapporteur sur le sommet de l'angle et on place une graduation 0 sur un côté de l'angle.



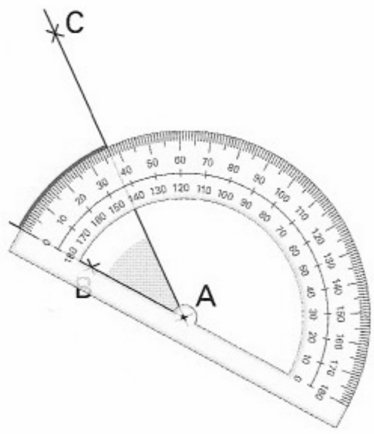
2ième étape : On lit la mesure de l'angle sur l'autre côté de l'angle.

Méthode **Utiliser le rapporteur pour mesurer un angle**

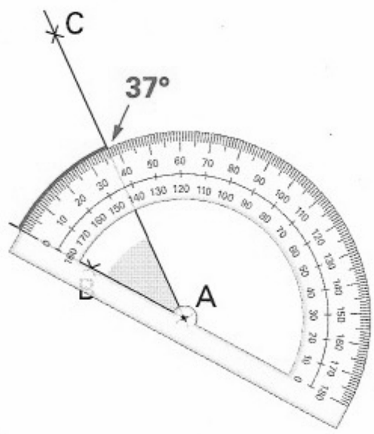
Avant de mesurer l'angle $\widehat{BAC}$, on remarque qu'il est aigu : sa mesure est donc comprise entre 0° et 90°.



On place le rapporteur : son centre en A et une graduation 0 sur un côté de l'angle.



On lit le nombre de degrés : cet angle mesure 37°.



On vérifie qu'on a bien la mesure d'un angle aigu.

Remarque : Il peut parfois être nécessaire de prolonger les côtés de l'angle pour les mesurer.

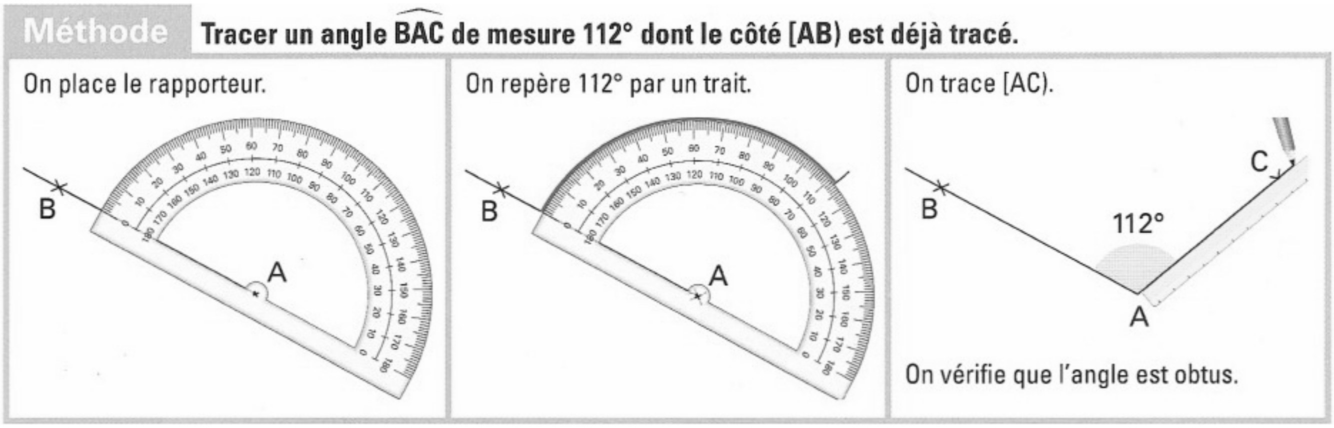
2) Construire un angle de mesure donnée

1ère étape : On trace un côté de l'angle et on marque son sommet.

2ième étape : On place le centre du rapporteur sur le sommet et on place une graduation 0 sur un côté de l'angle.

3ième étape : On repère la mesure donnée sur la graduation du rapporteur (en partant de 0°) et on place un point.

4ième étape : On trace le deuxième côté de l'angle qui part du sommet et qui passe par le point que l'on vient de placer.



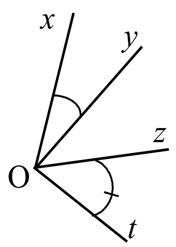
IV. Angles adjacents-bissectrice d'un angle

1) Angles adjacents

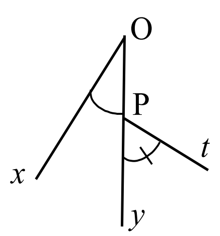
Définition 2 :

Deux angles sont adjacents lorsque :
- ils ont le même sommet
- ils ont un côté commun
- ils sont situés de part et d'autres de ce côté commun

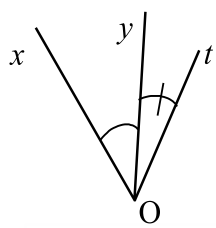
Exemple :



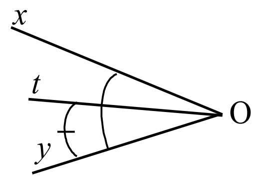
$\widehat{xOy}$ et $\widehat{zOt}$ ne sont pas adjacents.



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yPt}$ ne sont pas adjacents.



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOt}$ sont adjacents.



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOt}$ ne sont pas adjacents.

Remarque :

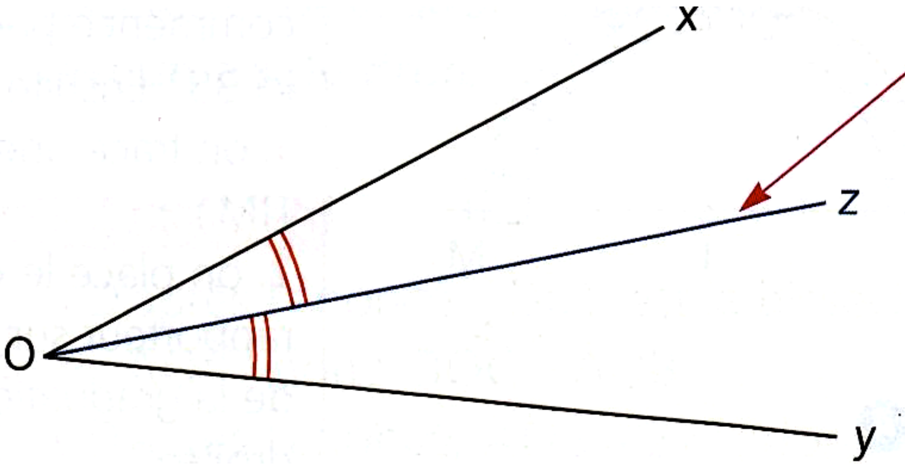
L'intérêt de savoir que deux angles sont adjacents est que l'on peut additionner leur mesure pour trouver la mesure de l'angle composé.

2) Bissectrice

Depuis le XIX^{è} siècle, est composé des mots « bi » et « sector » et signifie « celui qui coupe »

Définition 3 :

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.



La demi-droite $[Oz)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

$$\widehat{xOz} = \widehat{zOy} = \frac{\widehat{xOy}}{2}$$

Division

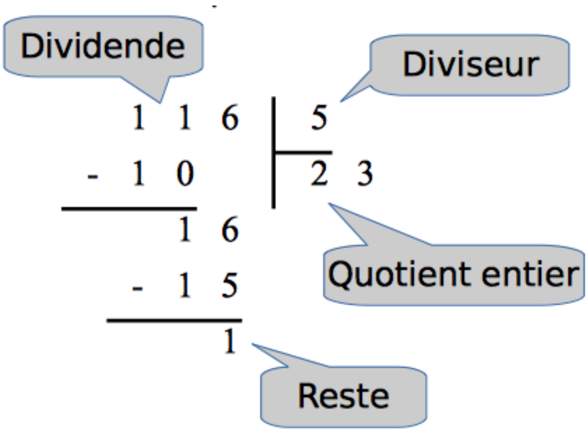
I. La division euclidienne

Définition 1 :

La **division euclidienne** d'un nombre entier (**le dividende**) par un autre nombre entier (**le diviseur**) est l'opération qui permet de calculer deux autres nombres entiers appelés le **quotient** entier et le **reste**.
Ces quatre nombres vérifient les deux conditions suivantes :

- le reste est inférieur au diviseur
- dividende = diviseur $\times$ quotient + reste

Exemple :



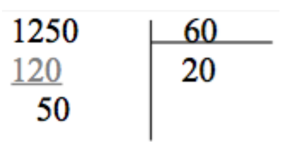
Cela veut dire que $116 = 5 \times 23 + 1$ et $1 < 5$.

Remarques :

- L'adjectif « euclidien » vient de Euclide qui est un mathématicien grec de l'antiquité.
  À cette époque on s'intéressait beaucoup aux entiers. On inventa l'arithmétique (mathématique des entiers).
- La division entière ou euclidienne ne se fait qu'avec des nombres entiers.
- Le diviseur ne peut jamais être 0 (la division par zéro n'existe pas).

Applications de la division euclidienne à des problèmes de conversion et de partage :

1) On veut convertir 1250 secondes en minutes. Sachant qu'il y a 60 secondes par minutes, on divise 1 250 par 60.



$1250 = 60 \times 20 + 50$ donc $1250 \div 60 = 20$ et il reste 50.
Le dividende est ici 1250, le diviseur 60, le quotient 20 et le reste 50.

Il y a donc 20 minutes et 50 secondes dans 1250 secondes.

2) On veut répartir 333 œufs dans des boîtes de 12. Combien faut-il de boîtes ?

$$\begin{array}{r|l} 333 & 12 \\ \hline \underline{24} & 27 \\ 93 & \\ -\underline{84} & \\ 9 & \end{array}$$

$333 = 12 \times 27 + 9$ donc $333 \div 12 = 27$ et il reste 9.
Le dividende est ici 333, le diviseur 12, le quotient 27 et le reste 9. Il y a donc 27 boîtes pleines et 9 œufs dans une 28$^{\text{ème}}$ boîte. Il faut 28 boîtes.

Utilisation de la calculatrice

Les calculatrices de collège, généralement, savent effectuer une division euclidienne. Sur certains modèles, la touche $\div R$ est utilisée pour cela. Sinon il faut « bricoler » en prenant les parties entières des divisions décimales :
$333 \div 12 = 27,75$ on garde le 27 puis on effectue $333 - 27 \times 12 = 9$ pour trouver le reste.

II. Divisibilité

1) Vocabulaire

Définition 2 :

On dit qu'un nombre est un diviseur d'un autre nombre (plus grand) lorsque le reste de leur division euclidienne est nul (égal à zéro).

Exemple :

Posons la division euclidienne de 84 par 7 :
$84 = 7 \times 12 + 0 = 7 \times 12$

Le reste de la division est nul.

On dira que **7 est un diviseur de 84** ou bien encore que **84 est divisible par 7** ou bien encore que **84 est un multiple de 7** (il est dans la table de multiplication de 7).

2) Critères de divisibilité

Un critère de divisibilité est un moyen de savoir si un nombre est divisible par un autre nombre sans avoir à poser la division.

Propriété 1 :

- Un nombre est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8).
- Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemples :

27 930 est :
- divisible par 2 parce qu'il est pair ;
- divisible par 5 parce que son chiffre est unités est 0 ;
- divisible par 3 parce que 2 + 7 + 9 + 3 + 0 = 21 et 21 est divisible par 3 ($3 \times 7 = 21$).

198 684 est :
- divisible par 4 parce que 84 est divisible par 4 ($4 \times 21 = 84$) ;
- divisible par 9 car 1 + 9 + 8 + 6 + 8 + 4 = 36 et 36 est divisible par 9 ($9 \times 4 = 36$).

Remarque :

Quand un nombre est divisible par 9 alors il est divisible par 3
36 est divisible par 9 et par 3
Mais le contraire n'est pas vrai : 21 est divisible par 3 mais pas par 9 !

III. Division décimale

Le symbole de la division $\div$ a été introduit en 1698 par l'allemand Gottfried Willhelm Leibniz, un des plus grands mathématiciens.

1) Définition

Définition 3 :

Effectuer la division décimale du nombre a par le nombre b (non nul) c'est trouver le nombre manquant $\square$ dans l'égalité : a = b $\times \square$.
Ce nombre manquant $\square$ s'appelle le quotient de a par b et se note a $\div$ b ou bien encore $\frac{a}{b}$.

Remarque :

a = b $\times \square$
donc $\square$ = a : b $\square$ est le quotient de a par b

Exemples :

$4{,}8 = 2{,}4 \times \square$ donc $\square = 4{,}8 \div 2{,}4 = 2$
$4 \times \square = 16{,}4$ donc $\square = 16{,}4 \div 4 = 4{,}1$

Un quotient peut donc être un nombre entier (exemple 1) mais peut aussi être un nombre décimal (exemple 2).
Il arrive parfois que le quotient ne soit pas un nombre décimal lorsque la division « ne s'arrête pas ».
On ne peut alors donner qu'une valeur approchée de ce quotient :

$1 \div 3 \approx 0{,}3$
Le quotient de 1 par 3 arrondi au dixième est égal à 0,3.

2) Diviser par 10, 100, 1 000...etc

Propriété 2 :

Quand on divise un nombre par :

- **10**, on décale la virgule de **1 rang vers la gauche** (le chiffre des **unités** devient le chiffre des **dixièmes**)
- **100**, on décale la virgule de **2 rangs vers la gauche** (le chiffre des **unités** devient le chiffre de **centièmes**)
- **1000**, on décale la virgule de **3 rangs vers la gauche** (le chiffre des **unités** devient le chiffre des **millièmes**).

Exemples :

$51{,}32 \div 10 = 5{,}132$ $\quad$ $0{,}9 \div 100 = 0{,}009$ $\quad$ $2{,}097 \div 100 = 0{,}02097$

Remarque :

Multiplier un nombre décimal par 0,1 ; 0,01 ou 0,001 revient à le diviser par 10, 100 ou 1 000

Exemple :

$204 \times 0{,}1 = 204 \div 10 = 20{,}4$ $\quad$ $3{,}25 \times 0{,}01 = 3{,}25 \div 100 = 0{,}0325$

3) Calcul mental

Pour calculer mentalement des divisions décimales on utilise la propriété suivante :

Propriété 3 :

On obtient des quotients égaux lorsqu'on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre.

Exemple :

On vide un tonneau de 30 litres en remplissant des bouteilles contenant chacune 0,75 litres.
Combien de bouteilles faut-il pour vider le tonneau ?

On cherche le nombre $\square$ tel que $0{,}75 \times \square = 30$ donc $\square = 30 \div 0{,}75$.

Or
$$\begin{aligned} 30 \div 0{,}75 &= 300 \div 7{,}5 \text{ (on a multiplié par 10 le dividende et le diviseur)} \\ &= 3000 \div 75 \text{ (on a multiplié par 100 le dividende et le diviseur)} \end{aligned}$$

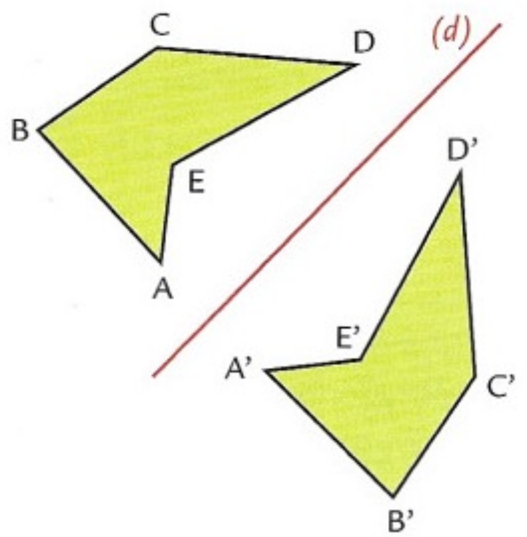
Donc il suffit d'effectuer la division de 3000 par 75 pour obtenir le résultat de $30 \div 0{,}75$.

La symétrie axiale

I. Figures symétriques

Définition 1 :

Deux figures sont symétriques par rapport à une droite si **en pliant** suivant cette droite les deux **figures se superposent**.
Cette droite est appelée **l'axe de la symétrie**.



Exemple :

Sur le dessin ci-contre, les deux polygones ABCDE et A'B'C'D'E' sont symétriques par rapport à la droite (d).

II. Symétriques de figures usuelles

1) Symétrique d'un point

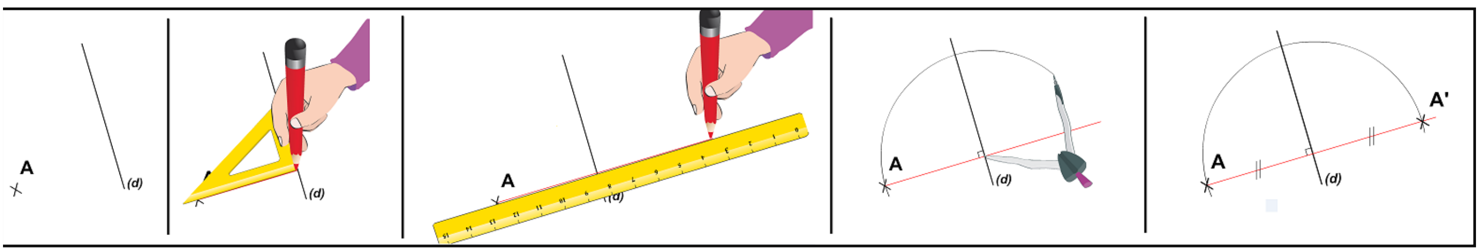
Définition 2 :

Le symétrique M' d'un point M par rapport à une droite (D) est telle que :

- (MM') est perpendiculaire à (D)
- Le point D est le milieu du segment [MM']

Comment construire le symétrique d'un point M par rapport à une droite (D) ?

1) Tracer la droite perpendiculaire à (D) passant par M
2) Cette droite coupe (D) en un point O ; tracer le cercle de centre O passant par M
3) Ce cercle recoupe la perpendiculaire à (D) en un point M'.



Remarque :

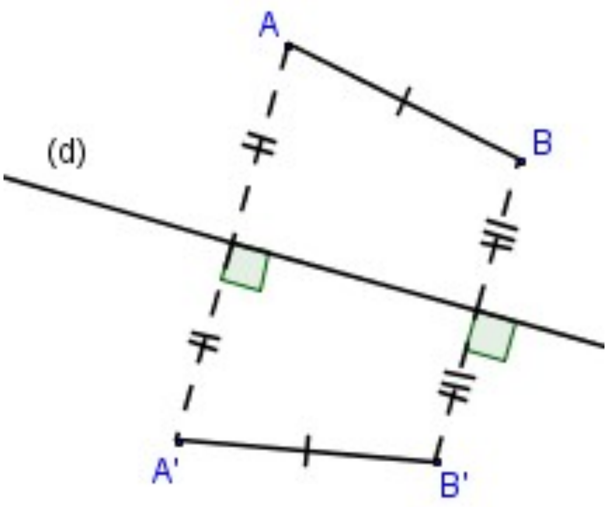
Un point de la droite (D) a pour symétrique lui-même.
Sur notre figure, le symétrique du point O par rapport à la droite (D) est O.
On dit d'un point qui n'est pas déplacé par une symétrie qu'il est invariant : ici O est un invariant par la symétrie axiale d'axe (D).

2) Symétrique d'un segment

Propriété 1 :

La symétrie axiale conserve les longueurs.

Exemple :



Les segments [AB] et [A'B'] sont symétriques par rapport à la droite (d) donc AB =A'B'

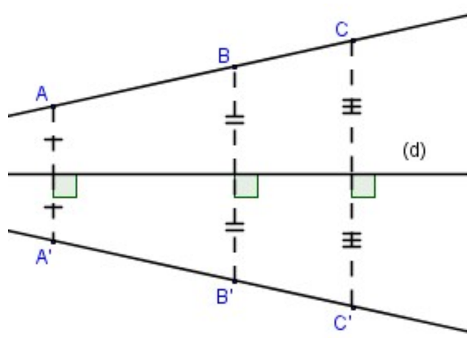
Remarque :

- Le symétrique d'un segment par rapport à une droite est un segment de même longueur.
- Pour construire le symétrique d'un segment par rapport à une droite, il suffit donc de construire le symétrique des deux extrémités du segment puis de tracer le segment qui joint les deux points.
- Le symétrique d'un polygone par rapport à une droite est un polygone qui a le même nombre de côtés, qui a la même aire et le même périmètre

3) Symétrique d'une droite

Propriété 2 :

Le symétrique d'une droite par rapport à une droite est une droite.
Des points alignés ont donc pour symétriques des points alignés.



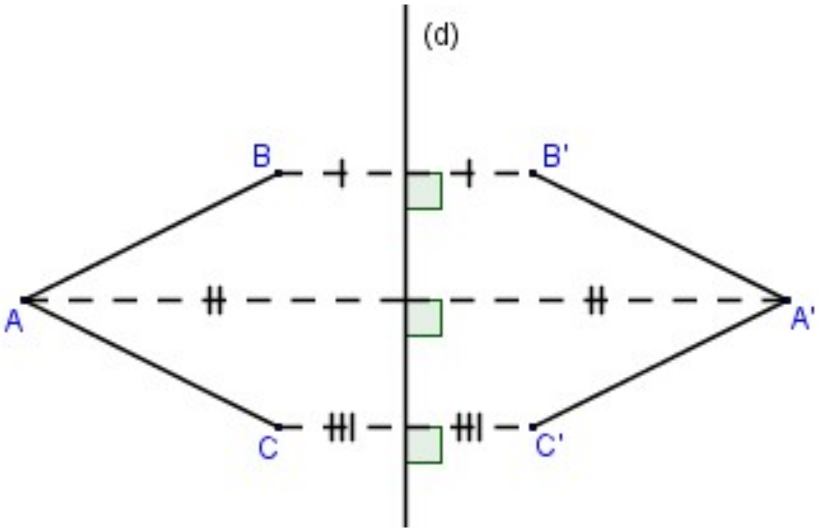
Remarque :

On dit que la symétrie axiale conserve l'alignement des points.

4) Symétrique d'un angle

Propriété 3 :

La symétrie axiale conserve la mesure des angles.



Exemple :

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont symétriques par rapport à (d) donc $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

5) Symétrique d'un cercle

Propriété 4 :

Le symétrique d'un cercle par rapport à une droite est un cercle de même rayon. Les centres de ces cercles sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie.

La symétrie axiale conserve donc :

- Les longueurs
- les périmètres
- les aires
- les mesures des angles
- l'alignement des points

Remarque :

La symétrie axiale est ce que l'on appelle une isométrie. (il en existe d'autre)

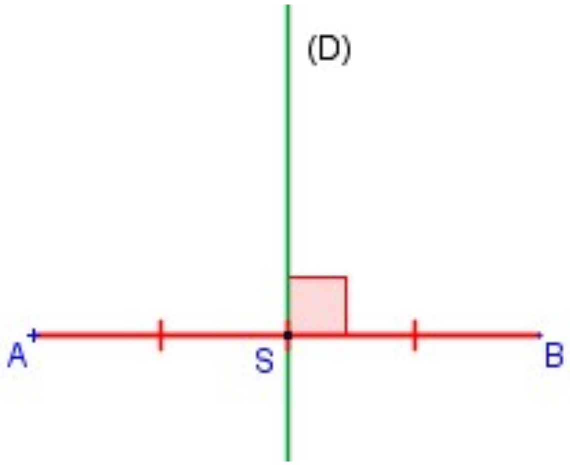
III. Médiatrice d'un segment et axe de symétrie

1) Définition

Définition 3 :

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Exemple :



On sait que :
(D) est la médiatrice du segment [AB]

D'après la définition d'une médiatrice, on a donc :

- S milieu de [AB]
- (D) $\perp$ (AB)

Remarque :

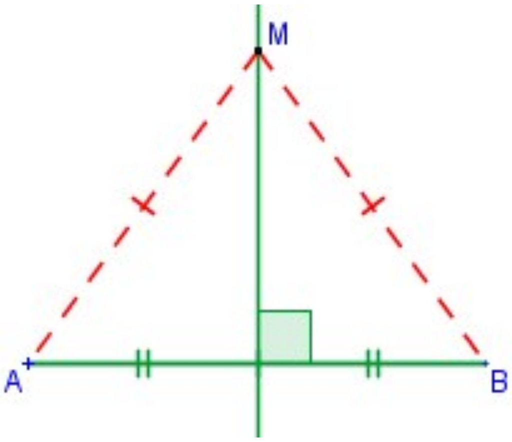
Dire que deux points A et B sont symétriques par rapport à une droite (d) c'est dire que la droite (d) est la médiatrice du segment [AB].

2) Propriétés

Propriété 5 :

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Exemple :



On sait que :
M appartient à la médiatrice du segment [AB]

Or, Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Donc

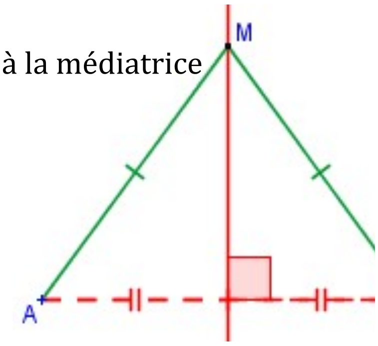
MA = MB

Propriété 6 (réciproque admise) :

Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.

Exemple :

On sait que :
MA = MB

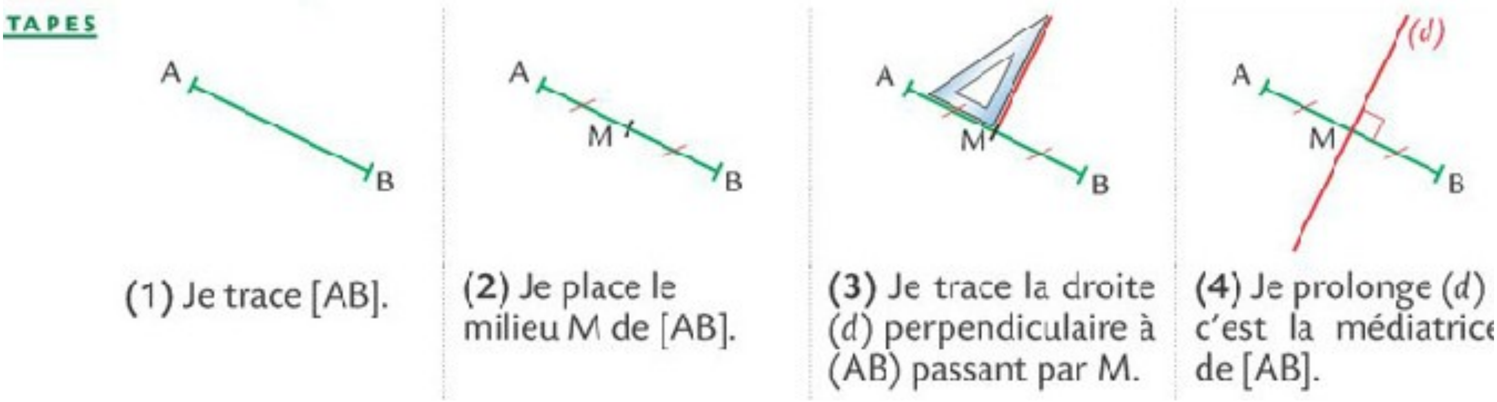


Or, Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.

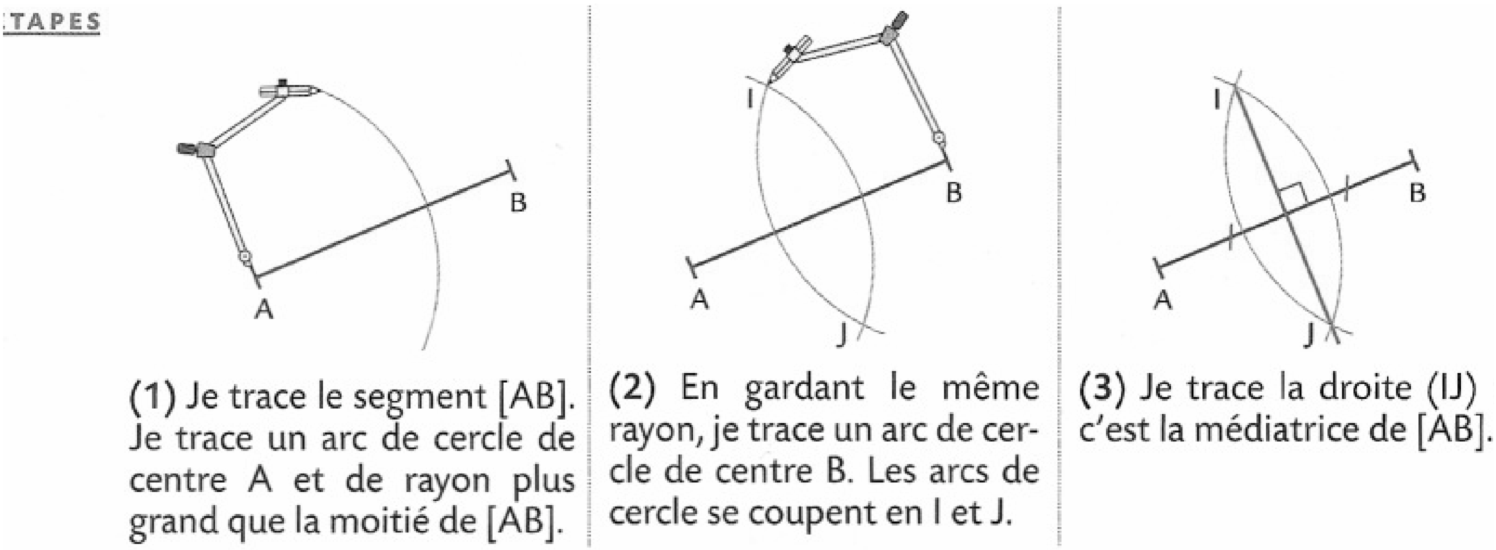
Donc,
M appartient à la médiatrice du segment [AB]

3) Constructions

a) À la règle et l'équerre



b) Au compas



Remarques :

- La bissectrice d'un angle est un axe de symétrie pour cet angle
- La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie de ce segment.

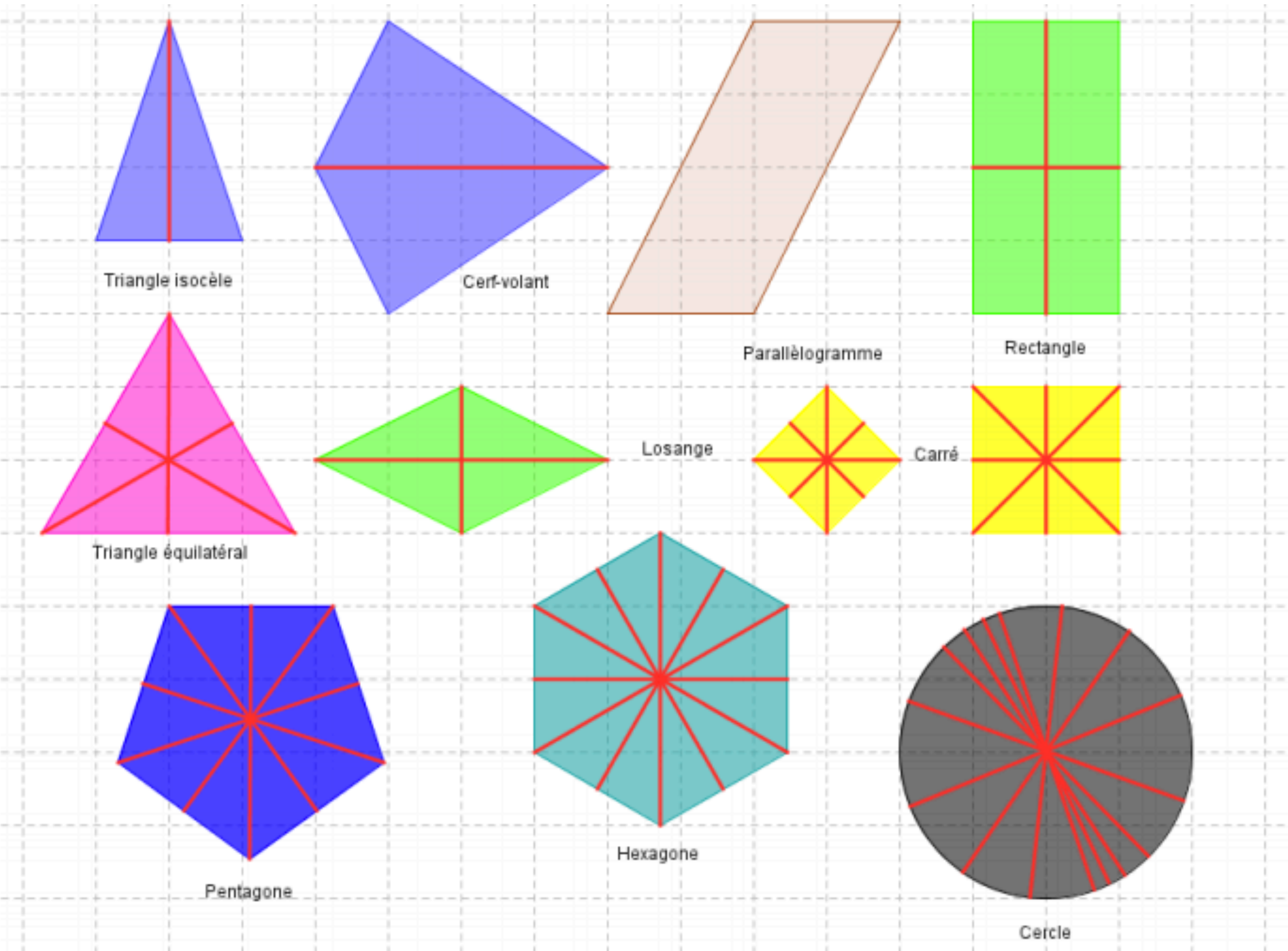
4) Axes de symétries d'une figure

Définition 4 :

On dit qu'une figure F admet la droite (D) comme axe de symétrie si tous les points de la figure F ont pour symétrique par rapport à la droite (D), un point de la figure F.

Autrement dit,

Une droite (D) est un axe de symétrie pour la figure F si F est invariante par la symétrie d'axe (D).



Les Fractions

Ce que je dois savoir et savoir faire à la fin de cette leçon

- Connaître le vocabulaire relatif aux fractions.
- Savoir placer sur la droite graduée un point ayant pour abscisse un nombre en écriture fractionnaire.
- Savoir prendre une fraction d'une quantité.
- Savoir comparer deux fractions
- Savoir résoudre un problème mettant en jeu des fractions.

Les fractions trouvent leurs origines en Egypte avec les fractions de numérateur 1.
Au Moyen-Âge eu Europe, les fractions sont appelées nombres rompus (du grec fractiones=fracture, rompus).
La barre de fraction venant des arabes fut ensuite reprise par le français Nicole Oresme (XIV$^{\text{ème}}$ siècle).
C'est également à lui que l'on doit les noms de « numérateurs » du latin numerator (celui qui compte) et de « dénominateurs » du latin denominator (celui qui nomme).

I. Les fractions comme expression d'un partage

Définition 1 :

Quand a et b sont deux nombres entiers, $\frac{a}{b}$ est appelée une fraction.

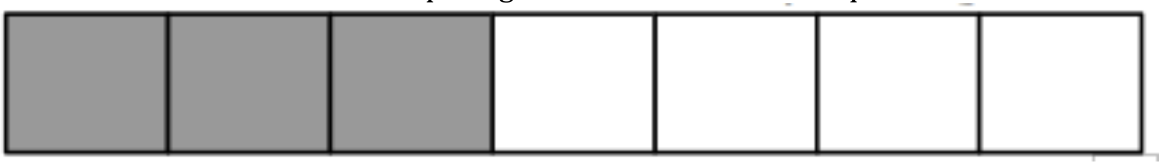
a est appelé le numérateur et b le dénominateur de la fraction.

Remarque :

Le numérateur indique combien de parts on prend.
Le dénominateur indique en combien de parts l'unité est partagée.

Exemples :

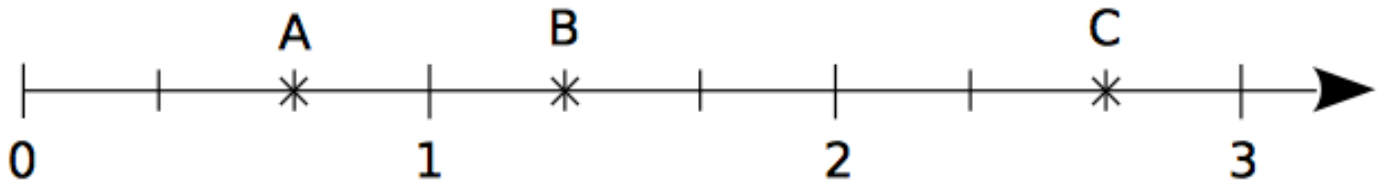
- Une fraction peut servir à exprimer une proportion :
  La bande ci-dessous est partagée en 7 morceaux identiques.



Chaque morceau représente donc $\frac{1}{7}$ de la bande.

Les 3 morceaux coloriés représentent $3\times\frac{1}{7}$ de la bande c'est à dire les $\frac{3}{7}$ de la bande.

- Une fraction peut servir à noter l'abscisse d'un point sur une demi-droite graduée :



Le point A a pour abscisse $\frac{2}{3}$; B a pour abscisse $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$ et le point C a pour abscisse $\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$.

II. Les fractions comme écriture d'un quotient

1) Définition d'un quotient come écriture fractionnaire

Définition 2 :

Le quotient de a par b est le nombre qui multiplié par b donne a. Ce quotient se note $a:b$ ou $\frac{a}{b}$ (en écriture fractionnaire). Le nombre a s'appelle le numérateur et le nombre b s'appelle le dénominateur.

Lorsque a et b sont des nombres entiers, l'écriture $\frac{a}{b}$ est appelé fraction.

Lorsque a ou b sont des nombres décimaux, l'écriture $\frac{a}{b}$ est appelé « nombre en écriture fractionnaire ».

Exemples :

Nous avons vu que certains quotients n'avaient pas d'écriture décimale exacte du car la division ne s'arrêtait jamais.
Par exemple, 4 ÷ 3 n'a pas d'écriture décimale exacte.
Par contre, tu pourras toujours écrire que $4 \div 3 = \frac{4}{3}$.

$15:6 = \frac{15}{6} = 2,5$. On a aussi $\frac{15}{6} \times 6 = 15$

$37:10 = \frac{37}{10} = 3,7$. On a aussi $\frac{37}{10} \times 10 = 37$

Remarque :

La division par 0 n'existe pas donc le dénominateur est toujours différent de 0.

La fraction $\frac{a}{b}$ est le quotient des entiers a et b, c'est un nombre obtenu par une division.

On appelle **fraction décimale**, une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, …

2) Proportion

Dans un collège, $\frac{7}{8}$ des élèves portent des lunettes.
Signification : cette phrase signifie que sur 8 élèves, 7 élèves portent des lunettes
Vocabulaire : on dit que la proportion des élèves qui portent des lunettes est $\frac{7}{8}$.
Représentation :

III. Propriétés des fractions

1) Fractions égales et quotients égaux

Propriété 1 :

Un quotient ne change pas si l'on multiplie (ou l'on divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Pour $b \neq 0$ et $k \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$

Exemples :

A = $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}$ B = $\frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}$

Remarque : Lorsque l'on écrit $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, on obtient une fraction égale à $\frac{12}{15}$ mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits. On dit que l'on a simplifié la fraction $\frac{12}{15}$ par 3.

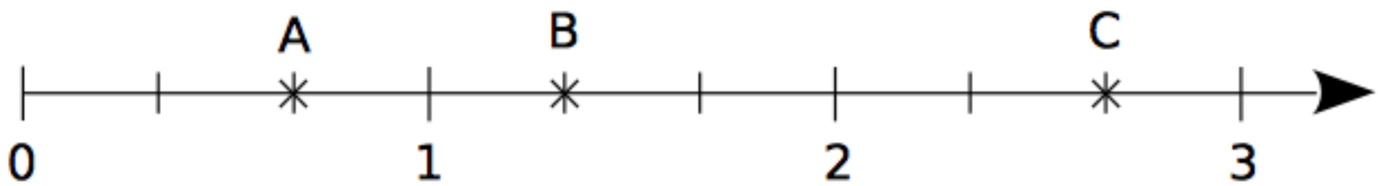
2) Comparaisons de fractions

Propriété 2 :

Pour comparer deux fractions, on peut s'aider d'une demi-droite graduée ou utiliser leur écriture décimale (quand elle existe).

Exemples :

Sur cette demi-droite graduée, A est plus proche de 0 que B donc l'abscisse du point A est inférieure à



celle du point B c'est à dire : $\frac{2}{3} < \frac{4}{3}$.

Pour comparer $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$ on peut procéder de la façon suivante :

$\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1{,}5$ et $\frac{5}{4} = 5 \div 4 = 1{,}25$ et $1{,}25 < 1{,}50$ donc $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$.

3) Prendre une fraction d'une quantité

Propriété 3 :

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier cette fraction par cette quantité.

Exemple :

Dans une classe, $\frac{5}{8}$ des 24 élèves sont des filles. La proportion de filles dans cette classe est égale à

$\frac{5}{8}\times 24$

Méthode : Pour calculer $\frac{5}{8}\times 24$, on peut utiliser trois méthodes :

1ère méthode : $\frac{5}{8}\times 24=\frac{5\times 24}{8}=\frac{120}{8}=15$ (On multiplie 5 par 24 et on divise le résultat par 8)

2ème méthode : $\frac{5}{8}\times 24=0,625\times 24=15$ (On divise 5 par 8 et on multiplie le résultat par 24)

3ème méthode : $\frac{5}{8}\times 24=\frac{24}{8}\times 5=3\times 5=15$ (On divise 24 par 8 et on multiplie le résultat par 5)

La proportion de filles dans cette classe est donc égale à 15.

4) Pourcentage

Définition 3 :

Calculer un pourcentage, c'est écrire une proportion de dénominateur 100.

Exemple : $25\%=\frac{25}{100}=0,25=\frac{1}{4}$ $50\%=\frac{50}{100}=0,5=\frac{1}{2}$ $75\%=\frac{75}{100}=0,75=\frac{3}{4}$ $100\%=\frac{100}{100}=1$

Exercice :

Un pull coûte 25 €. Pendant les soldes, on lui applique une réduction de 20 %. Quel est le montant de la réduction ?

Une remise de 20 % signifie que si l'article coûtait 100 €, il aurait 20 € de réduction.

$\frac{20}{100}=\frac{20:4}{100:4}=\frac{5}{25}$.

La réduction est donc de 5 €.

Axes de symétrie et figure usuelle

Ce que je dois savoir et savoir faire à la fin de cette leçon

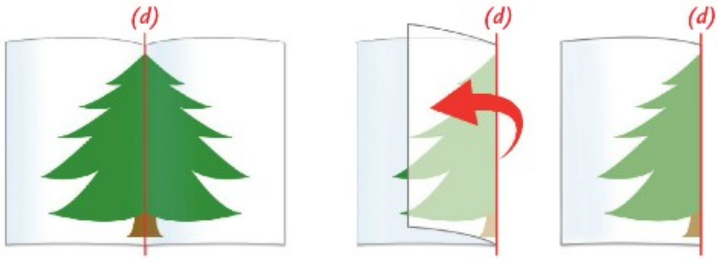
- Connaître les axes de symétrie des figures usuelles.

I. Axe de symétrie

Définition 1 :

Lorsque le symétrique d'une figure par rapport à une droite est la figure elle-même, on dit que cette droite est un axe de symétrie de la figure.

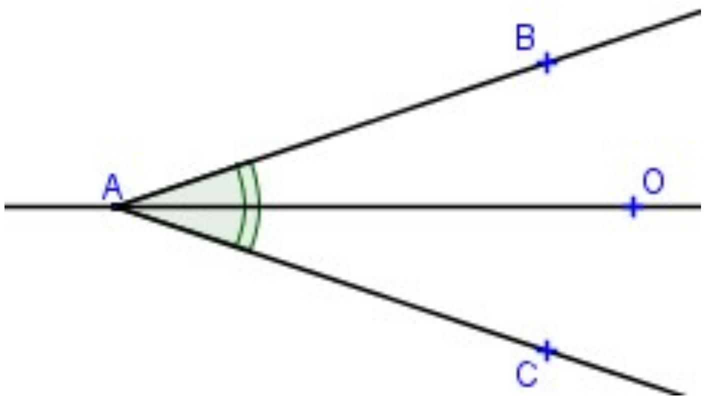
Exemple :



(d) est un axe de symétrie de la figure.

Remarque :

Un angle possède un axe de symétrie qui est la droite portant sa bissectrice.



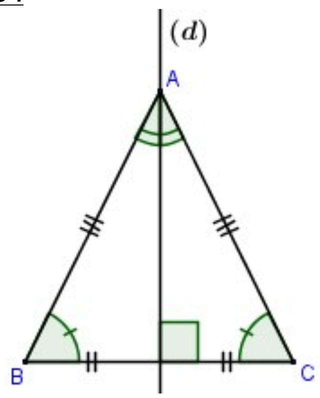
II. Triangles particuliers

1) Triangle isocèle

Propriété 1 :

Un triangle isocèle possède un axe de symétrie.
Cet axe est la médiatrice de la base (qui est aussi la bissectrice de l'angle principale).

Exemple :



La droite (d) est l'axe de symétrie du triangle ABC isocèle en A.
La droite (d) est aussi la médiatrice de la base [BC] et de la bissectrice de l'angle principale $\widehat{BAC}$.

Propriété 2:

Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base ont la même mesure.

Exemple :

Sur la figure ci-dessus, ABC est un triangle isocèle en A donc les angles à la base $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ ont la même mesure.

Propriété 3 (admise) :

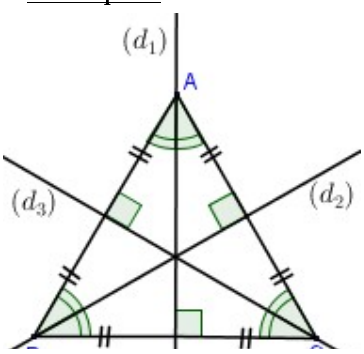
Un triangle qui possède un axe de symétrie est un triangle isocèle.

2) Triangle équilatéral

Propriété 4 :

Un triangle équilatéral possède trois axes de symétrie.
Ces axes sont les médiatrices de ses côtés (qui sont aussi les bissectrices des trois angles).

Exemple :



Les trois droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont les trois axes de symétrie du triangle équilatéral ABC.

Propriété 5 :

Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles ont la même mesure.

Exemple :

Sur la figure ci-dessus, ABC est un triangle équilatéral donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{CAB}$.

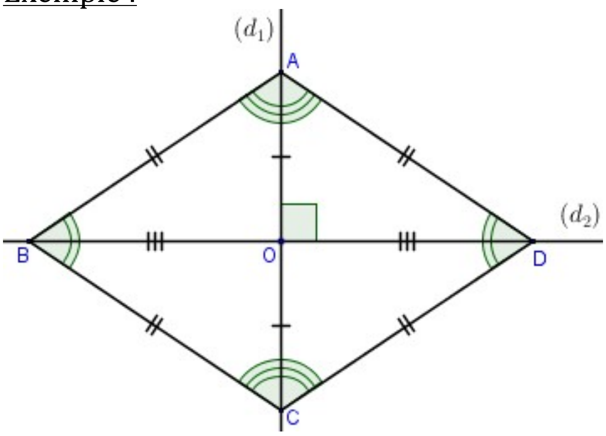
III. Quadrilatères particuliers

1) Losange

Propriété 6 :

Un losange possède deux axes de symétrie.
Ces axes sont les droites qui portent les diagonales (qui sont aussi les bissectrices des angles du losange).

Exemple :



Les deux droites (d_1) et (d_2) sont les deux axes de symétrie du losange ABCD.

Propriété 7:

Si un quadrilatère est un losange alors :
- Ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires
- Ses angles opposés ont la même mesure.

Exemple :

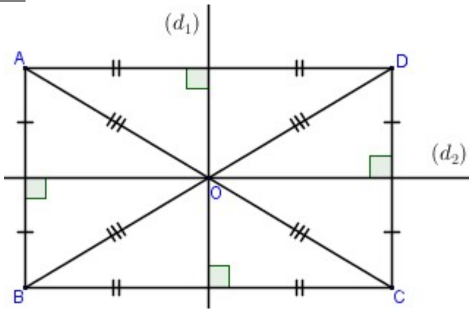
Sur la figure ci-dessus, le quadrilatère ABCD est un losange donc (AC) $\perp$ (BD), O est le milieu de [AC] et [BD], $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$.

2) Rectangle

Propriété 8 :

Un rectangle possède deux axes de symétrie. Ces axes sont les médiatrices des côtés.

Exemple :



Les deux droites (d_1) et (d_2) sont les deux axes de symétrie du rectangle ABCD.

Propriété 9:

Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

Exemple :

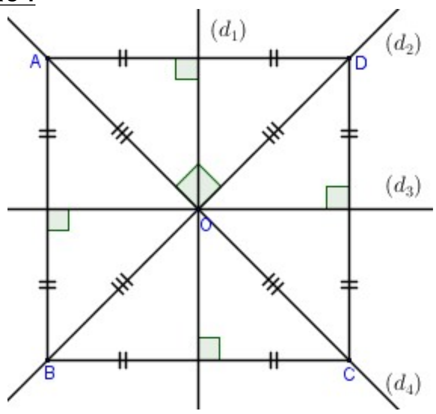
Sur la figure ci-dessus, le quadrilatère ABCD est un rectangle donc AC = BD et O est le milieu de [AC] et [BD]

3) Carré

Propriété 10 :

Un carré possède quatre axes de symétries. Ces axes sont les diagonales et les médiatrices de ses côtés.

Exemple :



Les quatre droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) sont les quatre axes de symétrie du carré ABCD.

Propriété 11:

Si un quadrilatère est un carré alors ses diagonales ont la même longueur, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires

Exemple :
Sur la figure ci-dessus, le quadrilatère ABCD est un carré donc AC = BD, O est le milieu de [AC] et [BD] et $(AC) \perp (BD)$

La Proportionnalité

Ce que je dois savoir et savoir faire à la fin de cette leçon

- Savoir reconnaître deux grandeurs proportionnelles.
- Savoir compléter un tableau de proportionnalité.
- Savoir utiliser un coefficient de proportionnalité.
- Savoir appliquer un taux de pourcentage.
- Faire le lien entre la proportionnalité et l'utilisation d'échelles, notion d'agrandissement, de réduction et de vitesse constante.

I. Grandeurs proportionnelles

1) Reconnaître la proportionnalité

Définition 1 :

On dit que deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les valeurs de l'une sont obtenues en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre non nul, appelé le coefficient de proportionnalité.

Remarque :

Deux grandeurs proportionnelles peuvent être représentées dans un tableau.

On dit alors que ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Exemple : Le prix payé pour un achat de carburant est proportionnel au nombre de litres mis dans le réservoir.

Volume en L	10	20	30	40
Prix en €	15	30	45	60

$\times$ **1,5**

Ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité de la première ligne vers la seconde est 1,5.

1,5 représente aussi le prix à payer pour 1 L de carburant.

On peut exprimer le prix P en euros en fonction du volume V en litres : $P = V \times 1{,}5$.

Exemple de situation de non proportionnalité :

La taille d'une personne et son âge ne sont deux quantités proportionnelles.

Âge (en années)	1	5	10	20
Taille (en mètres)	0,60	1	1,40	1,70

Dans ce tableau, on ne peut pas multiplier l'âge par un même nombre pour obtenir la taille.
$1\times 5 = 5$ mais $0{,}60\times 5 \neq 1$.

2) Calculs dans un tableau de proportionnalité

A) Propriété multiplicative

4 L de jus de mangue coûte 7,20 €. Sachant que le prix est proportionnel à la quantité de jus de fruits, quel est le prix de 8 L de jus de mangue ?

$\times 2$

Quantité de jus de mangue (en L)	4	8
Prix (en €)	7,20	14,40

$\times 2$

Le prix de 8 L de jus de mangue est de 14, 40 €.

B) Propriété d'additivité

Quel est le prix de 12 L de jus de mangue ?

Quantité de jus de mangue (en L)	4	8	12
Prix (en €)	7,20	14,40	21,60

On connaît le prix de 4 L et de 8 L de jus.
On remarque que 12 est la somme de 4 et de 8 : 4 + 8 = 12
Le prix de 12 L est donc égal à la somme du prix de 4 L et du prix de 8 L :
7, 20 + 14, 40 = 21, 60.

Le prix de 12 L de jus de mangue est donc de 21, 60 €.

C) Retour à l'unité

Quel est le prix d'un litre de jus de mangue ?

Quantité de jus de mangue (en L)	4	1
Prix (en €)	7,20	1,80

On calcule combien coûte 1 L de jus de mangue : $7{,}20 \div 4 = 1{,}80$

1, 80 € est le prix de 1 L de jus de mangue.

C'est aussi le coefficient de proportionnalité du tableau.

II. Appliquer un taux de pourcentage

Un collège comporte 500 élèves. 25 % d'entre eux sont externes.

Vocabulaire :

25 % des élèves sont externes signifie que :
- Le nombre d'élèves externes est proportionnel au nombre d'élèves du collège ;
- Pour 100 élèves du collège, 25 sont externes.

Propriété 1 :

Pour calculer p % d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{p}{100}$.

Exemple :

Pour calculer 25 % de 500, on calcule $500 \times \frac{25}{100}$.

$500 \times \frac{25}{100} = 500 \times 0{,}25 = 125$.

Dans ce collège, 125 élèves sont donc externes.

Remarque :

$25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$; $50\% = \frac{50}{100} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$; $75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$; $100\% = \frac{100}{100} = 1$

Quelques notions sur les pourcentages :

- Prendre 50% d'une quantité, c'est en prendre la moitié
- Prendre 25% d'une quantité, c'est en prendre le quart
- Prendre 75% d'une quantité, c'est en prendre les trois quarts
- Prendre 100% d'une quantité, c'est tout prendre.

Augmenter une quantité de p% c'est la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Diminuer une quantité de p% c'est la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$

Longueur-Périmètre et durées

I. Périmètre et comparaison géométrique

Le mot périmètre est emprunté au grec « perimetros » de « peri » qui veut dire « autour » et de « metron » qui signifie « mesure ».

Définition 1 :

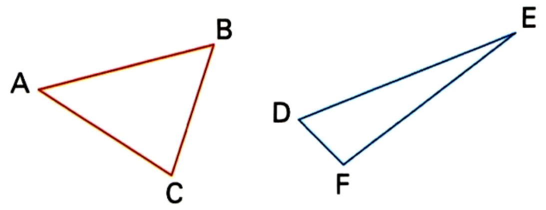
Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour.

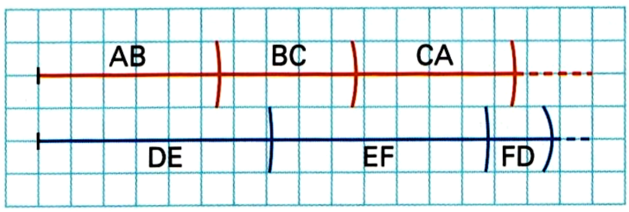
Remarque :

C'est donc la longueur de la ligne qu'on obtiendrait en « dépliant » le polygone.

MÉTHODE :
Pour comparer les périmètres de 2 polygones, il suffit de reporter avec un compas les longueurs de leurs côtés sur une demi-droite.

Exemple : Comparer les périmètres des triangles suivants.





Le triangle DEF a un périmètre supérieur à celui du triangle ABC.

II. Périmètre d'un polygone

1) Unité de mesure

Nous utilisons le système métrique en France depuis la « révolution française » et ses scientifiques qui o nt voulu uniformiser des pratiques régionales disparates. Ainsi la plupart de nos longueurs aujourd'hui sont dérivées du mètre (m). Il subsiste néanmoins d'autres unités de longueur : le mile nautique, le mile anglo-saxon, le pied et le pouce anglo-saxon, l'année lumière des astronomes, l'angström des physiciens,...Toutes convertibles dans le système métrique.

1 a.l = distance parcourue par la lumière en 1 année = 9 460 800 000 000 000 = = 9 460 Tm
1 pied (foot) = 12 pouces (inch) = 30, 48 cm
1 pouce = 25,4 mm
1 mile = 1 609 m
1 nautique = 1853, 18 m

Définition 2 :

L'unité légale de longueur est le mètre noté m.

Autres unités de longueur :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Conversions :

- 3 km = 3 000 m
- 52 cm = 520 mm
- 0,5 m = 50 cm

Remarque :

Le principe de ces unités repose sur la signification des préfixes :

- k pour kilo (1 000)
- h pour hecto (100)
- da pour déca (10)
- dm pour déci (0,1)
- c pour centi (0,01)
- m pour milli (0,001)

Il existe d'autres préfixes :

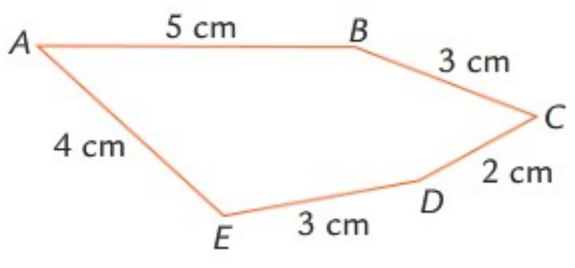
- M pour Méga (1 000 000)
- G pour Giga (1 000 000 000)
- T pour Téra (1 000 000 000 000)
- μ (mu le m grec) pour micro (0,000001)
- n pour nano (0,000000001)

2) Calcul du périmètre d'un polygone

Propriété 1 :

Pour calculer le périmètre d'un polygone, on additionne la longueur de ses côtés.

Exemple :



$\mathcal{P}$ = AB + BC + CD + DE + EA

$\mathcal{P}$ = 5 + 3 + 2 + 3 + 4

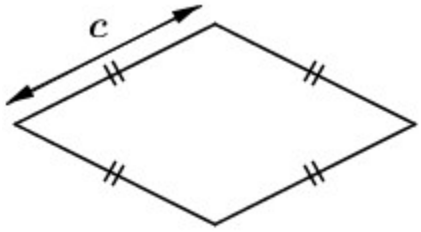
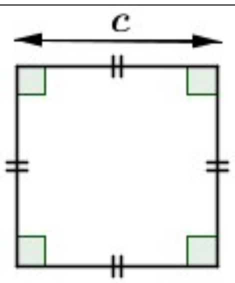
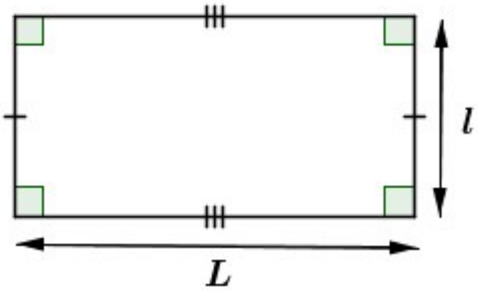
$\mathcal{P}$ = 17 cm

Le périmètre du polygone ABCDE est 17 cm.

Remarque :

Pour calculer le périmètre d'un polygone, il faut que toutes les longueurs soient exprimées dans la même unité

3) <u>Périmètre de figures usuelles</u>

Losange	**Carré**	**Rectangle**
		
$\mathcal{P}$ = c + c + c + c $\mathcal{P}$ = 4×c		$\mathcal{P}$ = L + l + L + l $\mathcal{P}$ = 2×L + 2×l $\mathcal{P}$ = 2×(L + l)

<u>Exemple :</u>

- Un losange de côté 5 m a pour périmètre : $\mathcal{P}$ = 5 x 4 = 20 m

- Un rectangle de longueur 6 m et de largeur 2 m a pour périmètre : $\mathcal{P}$ = 2 × 6 + 2 × 2 = 12 + 4 = 16m.

<u>III. Périmètre d'un cercle</u>

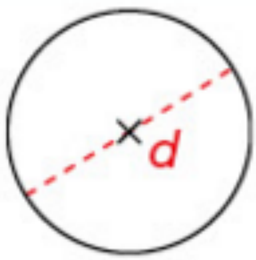
Il y a proportionnalité entre le diamètre d et le périmètre P d'un cercle.
Ceci est connu depuis l'Antiquité, les anciens estimant qu'un cercle mesurait environ 3 fois le diamètre, 6 fois le rayon.

On cite souvent la fraction $\frac{22}{7} \approx 3{,}1428$ connue depuis plus de 4 000 ans.

En réalité le rapport $\frac{P}{d}$ est légèrement supérieur à 3, ce nombre vaut exactement π.

<u>Propriété 2 :</u>

$$\boxed{\mathcal{P} = \boldsymbol{d \times \pi}}$$



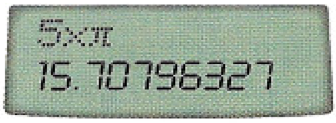
<u>Remarque :</u>

Puisque le diamètre est le double du rayon, la longueur d'un cercle de rayon r est : $\mathcal{P} = 2 \times r \times \pi$

Exemple :

La longueur d'un cercle de diamètre 5 cm est : $\mathcal{P} = \boldsymbol{d \times \pi}$

$\mathcal{P} = 5 \times \pi$ cm. (valeur exacte).

Pour obtenir une valeur approchée, on utilise la calculatrice : 

On a donc $\mathcal{P} \approx 15{,}7$ cm (valeur approchée au dixième)

IV. Durées

Définition 3 :

La mesure du temps entre deux instants s'appelle la durée.
Une unité de durée souvent utilisée est la seconde (s).

- Autres unités de durée

Multiples de l'unité			Unité	Sous-multiples de l'unité		
jour	heure	minute	seconde	dixième de seconde	centième de seconde	millième de seconde
1 j =24 h	1 h = 60 min	1 min = 60 s	1 s	0,1 s	0,01 s	0,001 s

- 1 semaine = 7 jours
- 1 mois = 28 ou 29 ou 30 ou 31 jours
- 1 an = 365 ou 366 jours
- 1 siècle = 100 ans
- 1 millénaire = 1 000 ans = 10 siècles

Aires et unités de surfaces

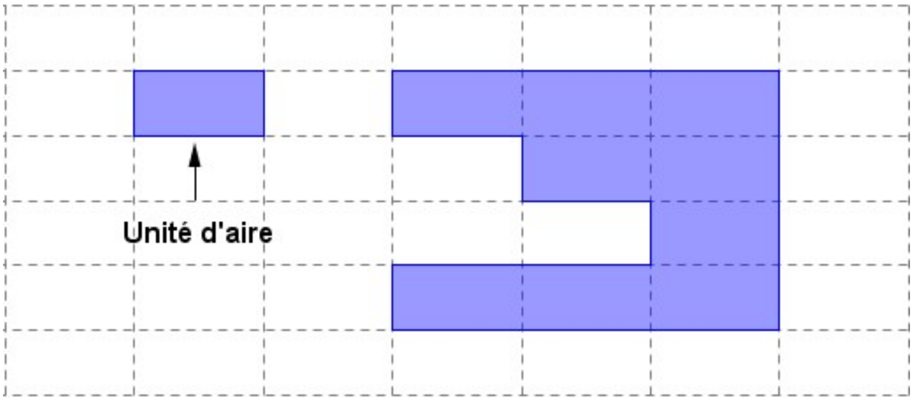
I. Aire d'une figure

1) Définition

Définition 1 :

La surface d'une figure plane est la partie située à l'intérieure de la figure.
L'aire d'une figure est la mesure de sa surface ou de sa superficie.

Exemple :



En prenant pour unité l'aire du petit rectangle, l'aire de la surface est 9 unités d'aire.

Remarque :

Il ne faut pas confondre l'aire d'une figure (mesure de sa surface) et son périmètre (mesure de son contour).

2) Unité d'aire

Définition 2 :

L'unité légale d'aire est le mètre carré noté m^2.

Unités d'aire	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
Valeur en m^2	1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,000 1 m^2	0,000 001 m^2

Remarque :

L'unité d'aire usuelle est le mètre carré (noté m^2), qui représente l'aire d'un carré de côté 1 m.
On utilise aussi :

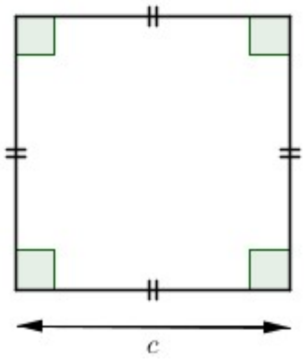
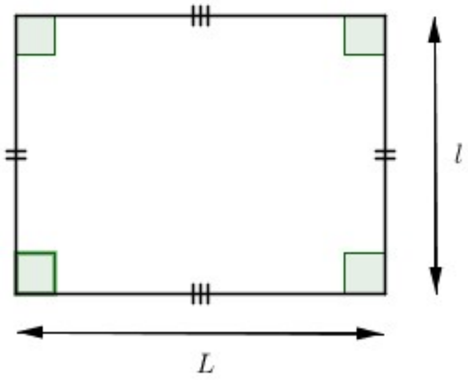
- ses multiples (km^2, hm^2, dam^2) ;
- ses sous-multiples (dm^2, cm^2, mm^2).
- Pour passer d'une unité d'aire à l'unité immédiatement inférieure, on **multiplie par 100.**
- Pour passer d'une unité d'aire à l'unité immédiatement supérieure, on **divise par 100.**

Exemples :

• 53 dam² = 5 300 m² • 7,81 hm² = 781 dam² = 78 100 m² • 2,9 hm² = 290 dam² = 29 000 m²	• 0,0036 dam² = 0,36 m² • 5 dm² = 0,05 m² • 8 000 cm² = 0,8 m²

II. Aires de figures usuelles

1) LE CARRÉ ET LE RECTANGLE

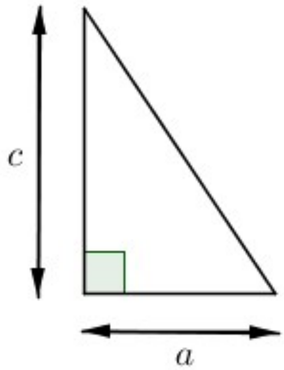
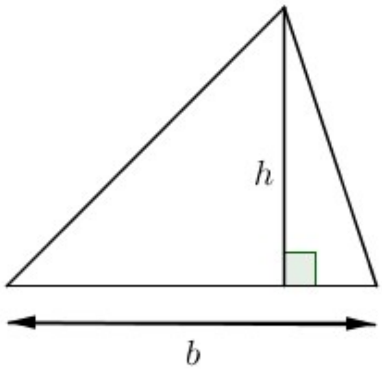
Carré	**Rectangle**
	
$\mathcal{A} = c \times c$	$\mathcal{A} = L \times l$

Exemple :

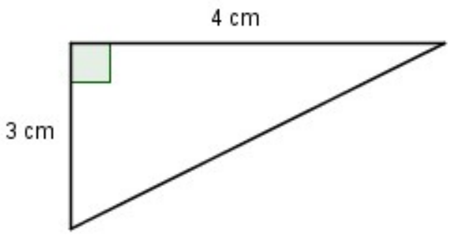
- L'aire d'un carré de côté 5 cm est : $\mathcal{A} = 5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$

- L'aire d'un rectangle de longueur 4 cm et de largeur 3 cm est : $\mathcal{A} = 4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$

2) LE TRIANGLE

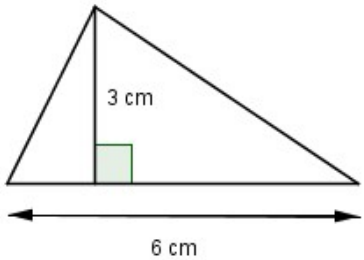
Triangle rectangle	**Triangle quelconque**
	
$\mathcal{A} = \frac{a\times c}{2}$	$\mathcal{A} = \frac{b\times h}{2}$

Exemple :



$$\mathcal{A} = \frac{3\times 4}{2}$$

$$\mathcal{A} = 6 \text{ cm}^2$$

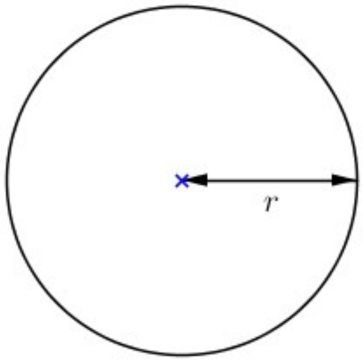


$$\mathcal{A} = \frac{6\times 3}{2}$$

$$\mathcal{A} = 9 \text{ cm}^2$$

3) LE DISQUE

Le disque



$$\mathcal{A} = \pi \times r \times r$$

Exemple :

- L'aire d'un disque de rayon 4 cm est : $\mathcal{A} = \pi \times 4 \times 4$

$$\mathcal{A} = 16 \times \pi$$

$$\mathcal{A} = 16 \times \pi \text{ cm}^2 \text{ (Valeur exacte)}$$

$$\mathcal{A} \approx 16 \times 3,14$$

$$\mathcal{A} \approx 50,24 \text{ cm}^2 \text{ (Valeur approchée)}$$

Remarque :

- Deux figures de formes différentes peuvent avoir le même périmètre.
- Deux figures de formes différentes peuvent avoir la même aire.
- Des figures peuvent avoir la même aire et des périmètres différents.
- Des figures peuvent avoir le même périmètre et des aires différentes.

Le Pavé droit et les unités de volume

I. Le pavé droit (ou parallélépipède rectangle)

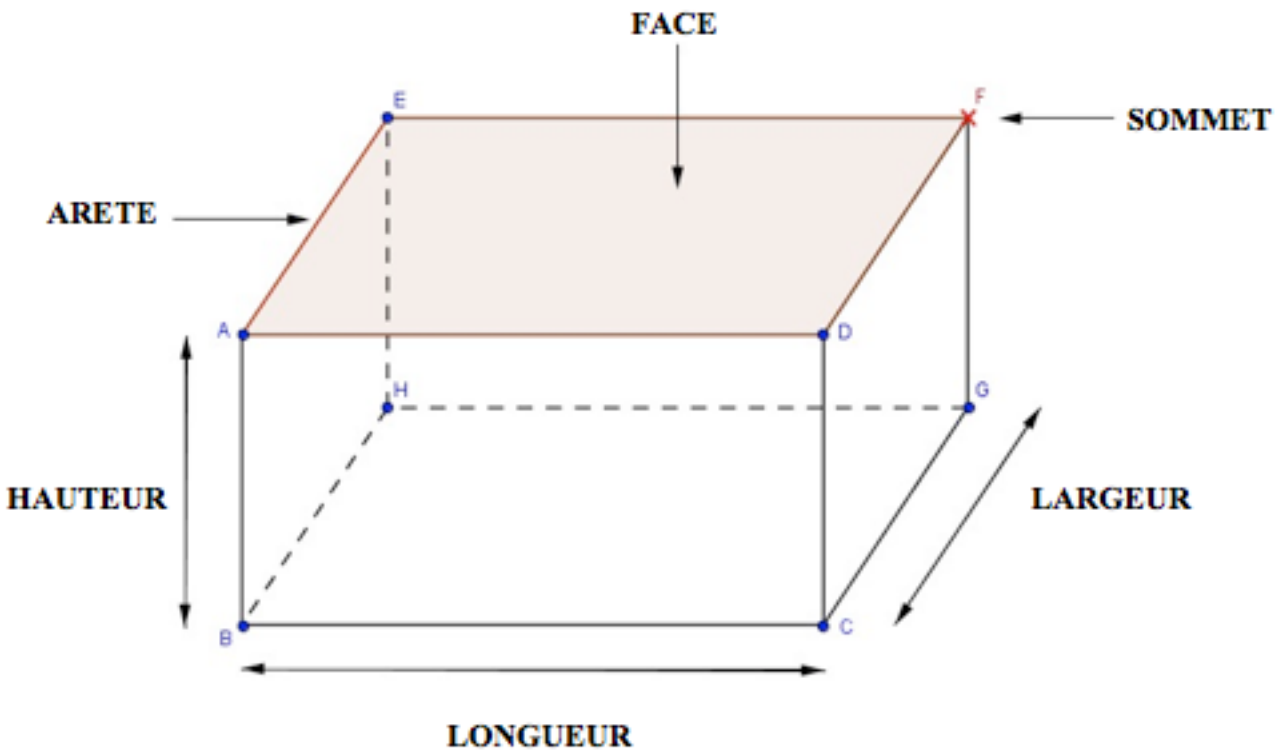
Le mot parallélépipède vient du grec « parallêlos » qui veut dire parallèle et de «épipedon » qui signifie surface plane.

1) Définition

Définition 1 :

Un parallélépipède rectangle ou pavé droit est un solide dont les six faces sont des rectangles

2) Vocabulaire

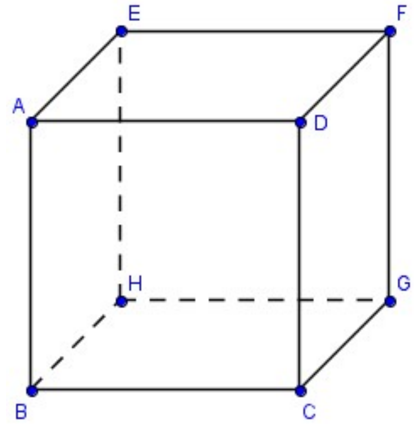


Remarque :

- Un parallélépipède possède 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces.
- Il est défini par trois dimensions : sa longueur L, sa largeur l et sa hauteur h.

Cas particulier :

Un cube est un parallélépipède particulier dont les six faces sont des carrés.



II. Volumes

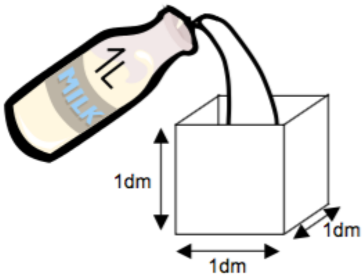
1) Unités de volume

Définition 2 :

Une unité de volume souvent utilisé est le mètre cube noté m^3.
1 m^3 est le volume d'un cube d'arête 1 m.

On utilise également d'autres unités pour les volumes :

- le décimètre cube noté dm^3 est le volume d'un cube de 1 dm d'arête
- le litre (L) qui est égal au dm^3
- la stère équivalente m^3 (utilisée pour mesurer le bois)



km^3	hm^3	dam^3	m^3			dm^3			cm^3			mm^3
					kL	hL	daL	L	dL	cL	mL	

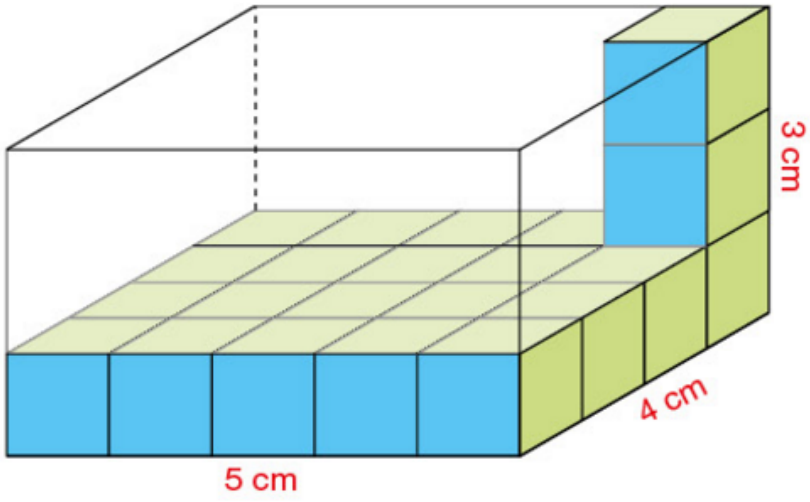
Remarque :

Parmi les unités anglo-saxonnes,

- l'once US est 1 fl oz = 30 mL
- la pinte (environ 0,5 L)
- le gallon anglo-saxon : 1 gal = 4,5 L et le gallon américain 1 gal US = 3,8 L
- le baril de pétrole : 1 bl = 42 gal US = 159 L

2) Volumes par dénombrement

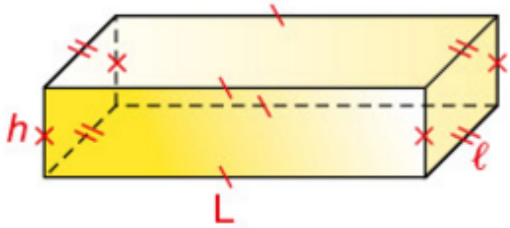
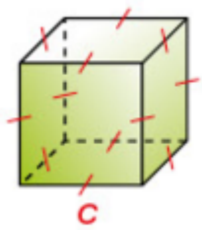
Pour déterminer le volume d’un solide, on peut compter le nombre de petits cubes unités qu’il y a dans celui-ci.



On remplit entièrement le pavé droit de cubes de 1 cm d’arête.

Au fond du pavé, on dispose de 5 rangées de 4 petits cubes, il y a donc 20 cubes au fond du pavé.
Il y a 3 couches superposées donc le pavé droit contient 60 cubes de 1 cm d’arête, son volume est de 60 cm^3 = 0,6 dm^3 = 0,6 L.

3) Volumes avec des formules

Pavé droit	Cube
	
$\mathcal{V} = L \times \ell \times h$	$\mathcal{V} = c \times c \times c$

Remarque :

Il faut que toutes les dimensions soient exprimées dans la même unité.

Exemple :

Avec le pavé droit précédant, on a :
$V = L \times l \times h$

$V = 5 \times 4 \times 3$

$V = 20 \times 3$

$V = 60$

On retrouve donc que le volume du pavé droit est de 60 cm^3.

Géométrie dans l'espace

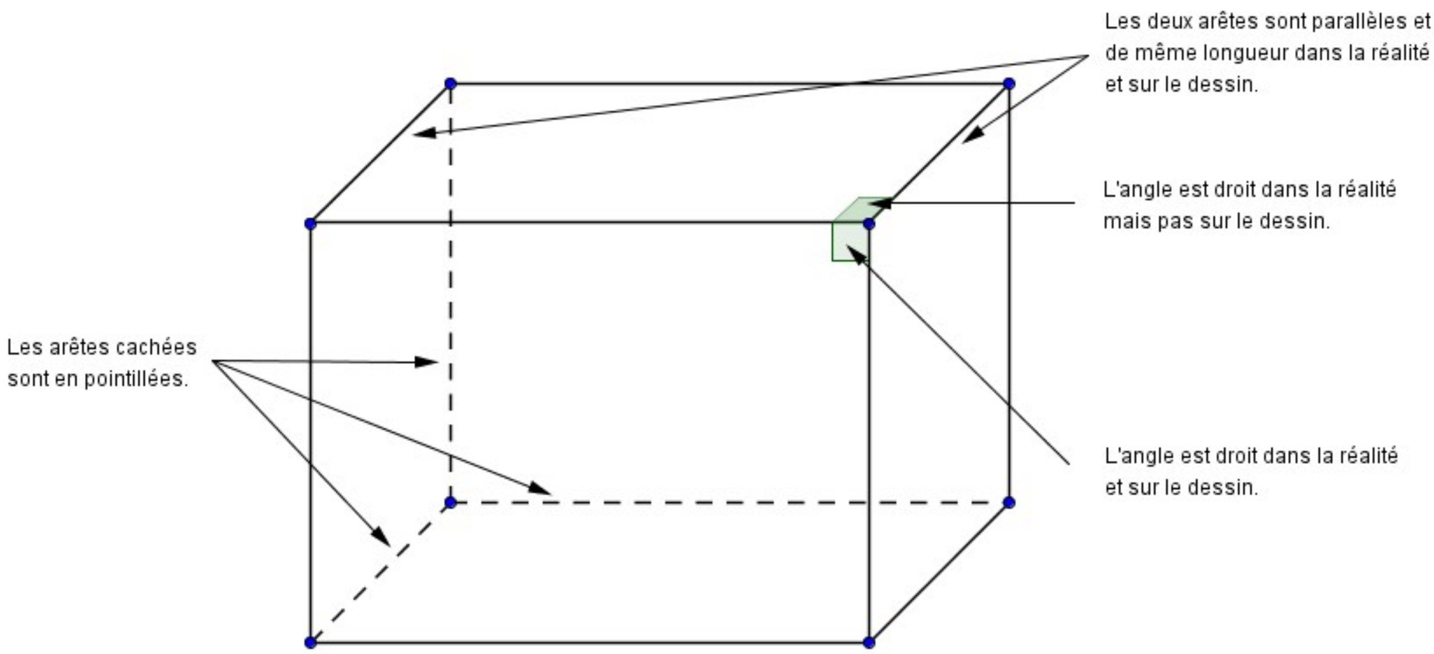
Ce que je dois savoir et savoir faire à la fin de cette leçon

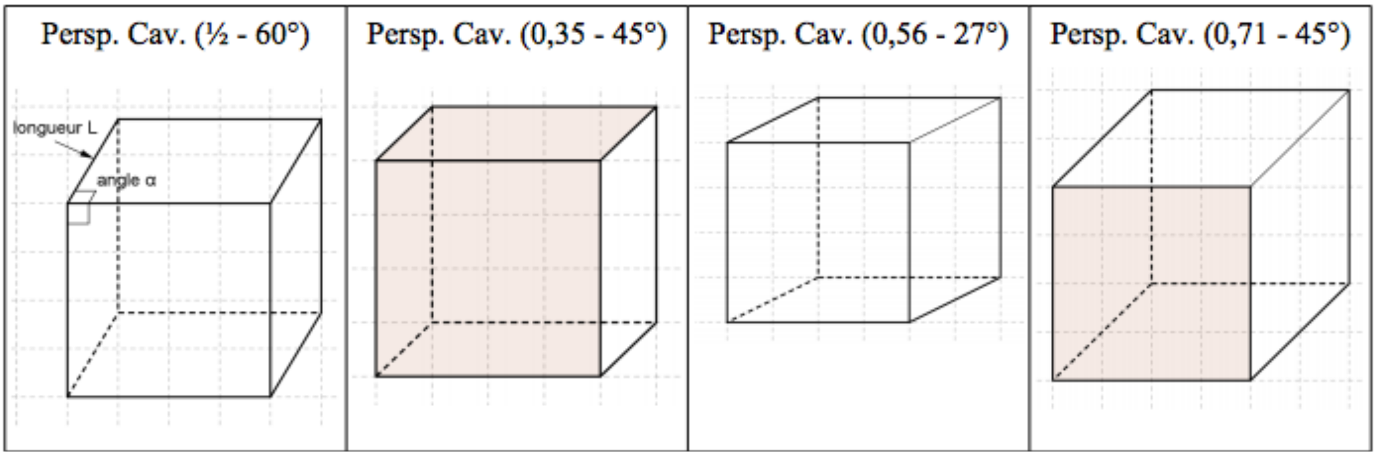
- Savoir se repérer et se déplacer dans le plan et l'espace.
- Savoir représenter des solides dans le plan.
- Savoir construire un patron d'un pavé droit, d'un cube, d'un prisme et d'une pyramide régulière.
- Connaître les solides qui ne sont pas des polyèdres comme la boule, le cône de révolution ou le cylindre de révolution.

I. Perspective cavalière

La perspective cavalière est un procédé qui permet de représente run solide (3D) sur une feuille de papier (dans le plan, en 2D) tout en rendant visible les parties cachées.
Pour cela, il faut respecter les règles suivantes :

- les arêtes parallèles sur le solide restent parallèles sur le dessin
- les arêtes parallèles et de même longueur restent de même longueur
- les milieux restent au milieu
- les points alignés restent alignés
- les arêtes cachées sont représentées en pointillés
- la « face avant » peut être représentée en vraie grandeur
- les arêtes fuyantes sont représentées environ deux fois plus petites que dans la réalité en suivant un angle d'environ 30° par rapport à l'horizontale (n'importe quel nombre entre 0° et 90° convient mais on prend souvent un nombre entre 30° et 60°).





<u>II. Les solides</u>

1) <u>Polyèdres</u>

Le mot polyèdre est apparu en 1690, il a pour originie les mots « poly » et « hedra » qui signifie « siège,place, base ».

<u>**Définition 1 :**</u>

Un polyèdre est un solide limité par des faces planes qui sont des polygones.

<u>Exemples :</u>

Le cube et le pavé droit sont des hexaèdres (des polyèdres à 6 faces)

<u>**Propriété de Descartes-Euler :**</u>

Si on désigne par S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces d'un polyèdre (convexe) on a :

$$S + F - A = 2$$

2) Prisme droit

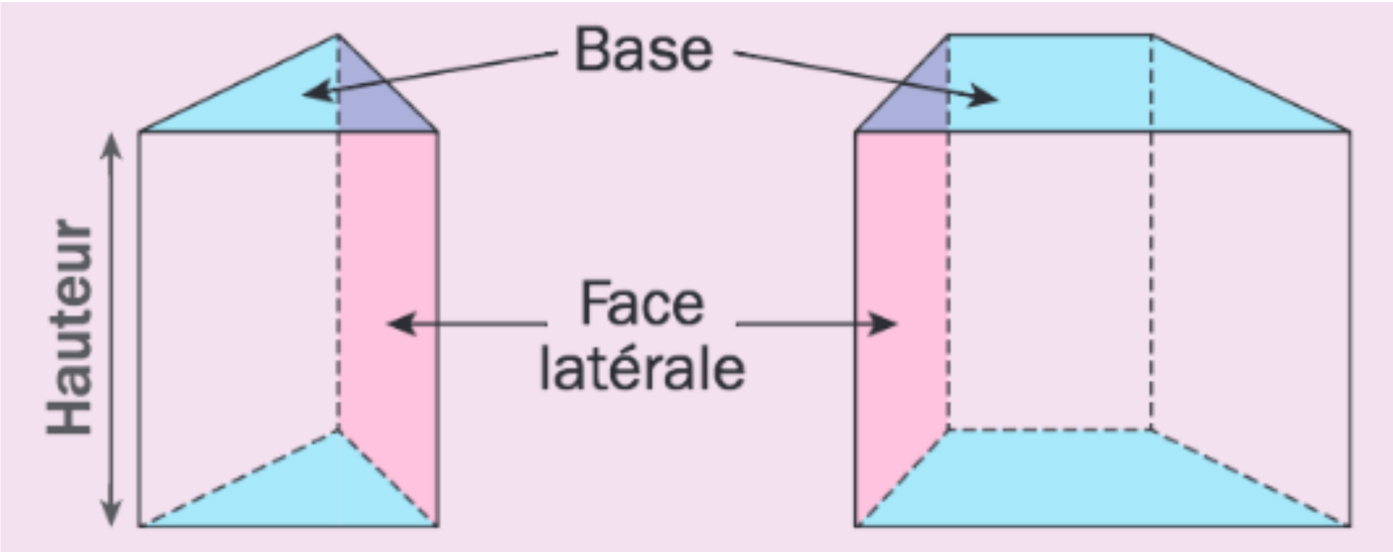
Définition 2 :

Un prisme droit est un polyèdre particulier, c'est un solide qui a :

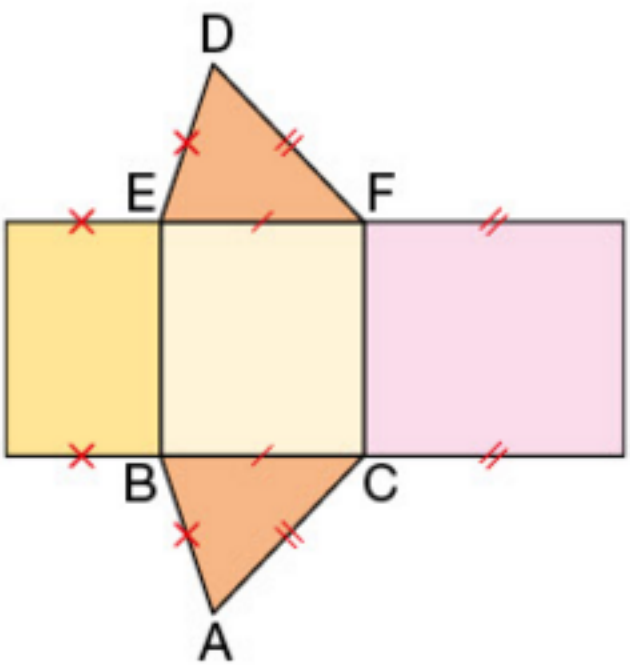
- deux polygones superposables pour faces parallèles : on les appelle les **bases** ;
- des rectangles pour autres faces, on les appelle les **faces latérales**.

Remarque :

La hauteur du prisme est la distance entre les deux bases.



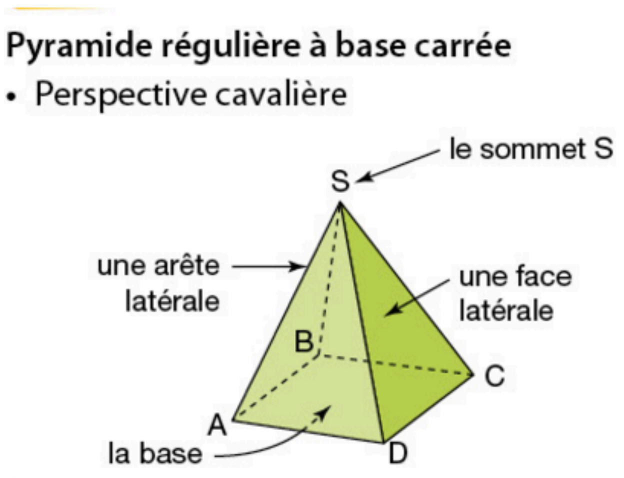
Un patron d'un prisme droit à base triangulaire :

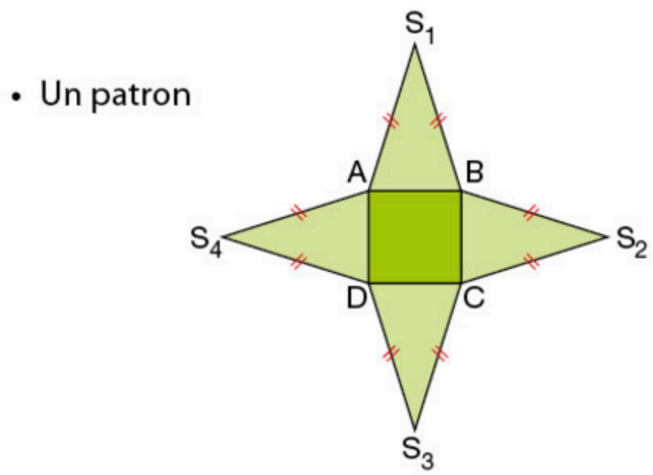


3) Pyramide régulière

Définition 3 :

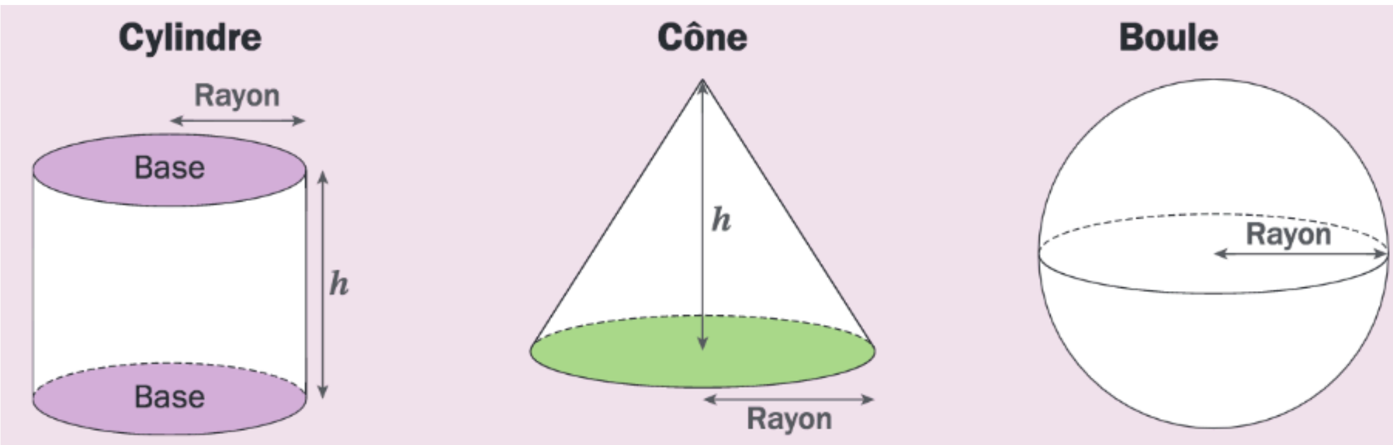
Une pyramide régulière est un polyèdre dont la base est un polygone régulier (triangle équilatéral, carré....) et les autres faces sont des triangles isocèles superposables.





III. Cylindre, boule et cône

Ce sont des solides qui ne sont pas des polyèdres :



Les bases sont des disques parallèles et de mêmes rayons

La base est un disque