I. Diviseurs d’un nombre entier

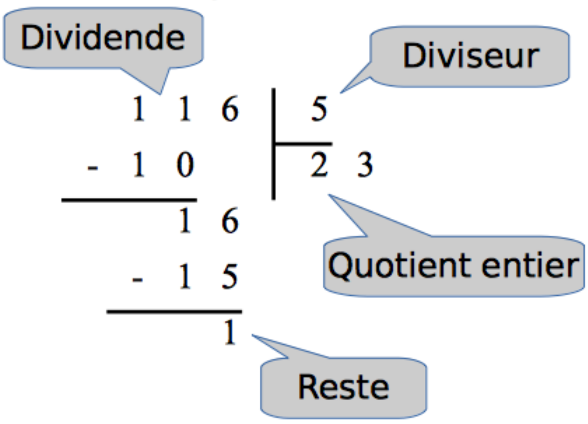
a) Rappels sur la division euclidienne

Définition 1 :

La **division euclidienne** d’un nombre entier (**le dividende**) par un autre nombre entier (**le diviseur**) est l’opération qui permet de calculer deux autres nombres entiers appelés le **quotient** entier et le **reste.**
Ces quatre nombres vérifient les deux conditions suivantes :

- le reste est inférieur au diviseur
- dividende = diviseur × quotient + reste

Exemple :



Cela veut dire que $116 = 5 \times 23 + 1$ et $1 < 5$.

Remarques :

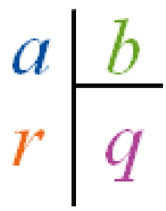
- L’adjectif « euclidien » vient de Euclide qui est un mathématicien grec de l’antiquité.
  À cette époque on s’intéressait beaucoup aux entiers.
  On inventa l’arithmétique (mathématique des entiers).
- La division entière ou euclidienne ne se fait qu’avec des nombres entiers.
- Le diviseur ne peut jamais être 0 (la division par zéro n’existe pas).
- Tout nombre est un multiple de 1
- Tout nombre entier est divisible par 1 et par lui-même.

Méthode 1 :

Effectuer la division euclidienne de a par b, c’est trouver deux entiers q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b$$

q est le quotient et r le reste de la division euclidienne.



Définition 2 :

On dit qu'un nombre est un diviseur d'un autre nombre (plus grand) lorsque le reste de leur division euclidienne est nul (égal à zéro).

Exemple :

Posons la division euclidienne de 84 par 7 :
$84 = 7 \times 12 + 0 = 7 \times 12$

Le reste de la division est nul.

On dira que **7 est un diviseur de 84** ou bien encore que **84 est divisible par 7** ou bien encore que **84 est un multiple de 7** (il est dans la table de multiplication de 7).

Remarque :

Dire que k est un diviseur de a signifie que $\frac{a}{k}$ est un nombre entier. ($k \neq 0$)

On dit aussi que :

- k est un diviseur de a
- k divise a
- a est un multiple de k (« a est dans la table de multiplication de k »)
- a est divisible par k

Méthode 2 :

Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre entier N, on teste la divisibilité de N par tous les nombres entiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$.

Exemple :

Pour trouver tous les diviseurs de 21, on calcule $\sqrt{21} \approx 4{,}6$.
Il faut donc tester la divisibilité par 1, par 2, par 3 et par 4 :

$21 = 1 \times 21 = 3 \times 7$ Donc 21 a 4 diviseurs qui sont 1 ; 3 ; 7 et 21.

b) Critères de divisibilité

Un critère de divisibilité est un moyen de savoir si un nombre est divisible par un autre nombre sans avoir à poser la division.

Propriété 1 :

- Un nombre est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8).
- Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

Exemples :

27 930 est :
- divisible par 2 parce qu'il est pair ;
- divisible par 5 parce que son chiffre est unités est 0 ;
- divisible par 3 parce que 2 + 7 + 9 + 3 + 0 = 21 et 21 est divisible par 3 ($3 \times 7 = 21$).

198 684 est :
- divisible par 9 car 1 + 9 + 8 + 6 + 8 + 4 = 36 et 36 est divisible par 9 ($9 \times 4 = 36$).

Remarque :

Quand un nombre est divisible par 9 alors il est divisible par 3
36 est divisible par 9 et par 3

Mais le contraire n'est pas vrai : 21 est divisible par 3 mais pas par 9 !

II. Nombres premiers

Définition 3 :

Un nombre premier est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

Exemple :

13 ne possède que deux diviseurs : 1 et lui-même ; 13 est donc un nombre premier.

Contre-exemple :

4 n'est pas un nombre premier car 4 admet 3 diviseurs : 1 ; 2 et lui-même.

Remarque :

- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs (tous les nombres différents de 0 peuvent diviser 0)
- 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : lui-même
- 2 est le seul nombre premier pair car tous les autres nombres pairs sont divisibles par 2 ?

Propriété 2 :

Il existe une infinité de nombres premiers.
La liste des nombres premiers inférieurs à 50 sont :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47

Propriété 4 –Montrer qu'un nombre est premier:

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Pour montrer que N est premier, il suffit de montrer que N n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$.

Exemple :

On veut savoir si 213 est un nombre premier.
On calcule $\sqrt{213} \approx 14{,}6$. Il faut donc tester la divisibilité de 213 par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 et 13.
$213 = 3 \times 71$ donc 21 » n'est pas un nombre premier.

III. Décomposition en produits de facteurs premiers

Propriété 3-théorème fondamental de l'arithmétique :

Tout nombre entier non premier supérieur à 2 peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique (si on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs)

Exemple :

On veut décomposer le nombre 84 en produits de facteurs premiers :

- On cherche le plus petit nombre premier qui divise 84 : c'est 2 car $84 = 2 \times 42$
- On recommence avec le quotient obtenu jusqu'à obtenir 1 pour quotient :
  $42 = 2 \times 21$
  $21 = 3 \times 7$
  $7 = 7 \times 1$
- On a donc $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$.

Une autre méthode consiste à écrire un produit quelconque.
Par exemple si on souhaite décomposer 1 600 en produits de facteurs premiers on a :

$$1600 = 16 \times 100 = 4 \times 4 \times 10 \times 10 = 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^6 \times 5$$

La décomposition en produit de facteurs premiers peut se révéler utile pour réduire une fraction en fraction irréductible.

IV. Fraction irréductible

Définition 4 :

Une fraction est dite irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pour seul diviseur commun que le nombre 1.

Exemple :

$\frac{8}{9}$ est une fraction irréductible

Remarque :

- Deux nombres a et b sont dits « premiers entre eux » lorsque 1 est le seul diviseur commun à a et à b.
- Deux nombres entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux (8 et 9 par exemple sont premiers entre eux)
- Dire que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible signifie que a et b sont premiers entre eux.

Méthode 3- Rendre une fraction irréductible avec les facteurs premiers :

- On décompose le numérateur en produits de facteurs premiers
- On décompose le dénominateur en produits de facteurs premiers
- On simplifie jusqu'à qu'ils soient composés de facteurs premiers différents

Exemple :

On veut rendre la fraction $\frac{84}{30}$ irréductible.

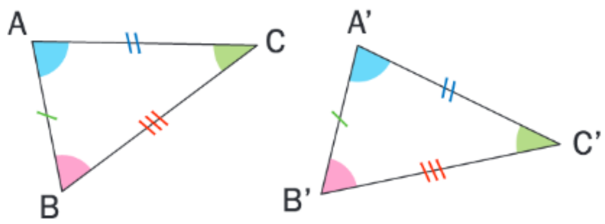
$$\frac{84}{30}=\frac{2^2\times3\times7}{2\times3\times5}=\frac{2\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times7}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times5}=\frac{2\times7}{5}=\frac{14}{5}$$

I. Des triangles égaux et des triangles semblables

a) Des triangles égaux

Définition 1 :

Deux triangles sont égaux lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur.



Propriété 1 :

Des triangles égaux sont superposables et leurs angles ont même mesure.

Remarque :

Deux triangles qui ont des angles de même mesure ne sont pas forcément égaux.

Propriété 2 :

Si deux triangles ont deux à deux :

- un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur

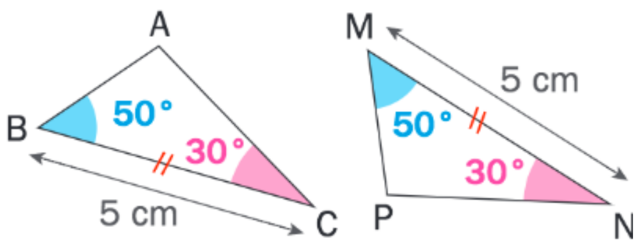
OU

- un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure

alors ils sont égaux.

Exemple :

Comme BC = MN et que $\widehat{ABC} = \widehat{PMN}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{MNP}$
les triangles ABC et MNP sont égaux.



b) Des triangles semblables

Définition 2 :

Des triangles sont semblables lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Remarques :

- Si deux triangles sont égaux alors ils sont semblables.
- Deux triangles semblables ne sont pas forcément égaux.

Propriété 3 :

Si deux triangles ABC et A’B’C’ sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

$$\text{On a } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \text{ et } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k' = \frac{1}{k}$$

Si k < 1 alors A’B’C’ est une réduction de ABC de rapport k.
Si k > 1 alors A’B’C’ est un agrandissement de ABC de rapport k.

Autrement dit :

Longueurs du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs du triangle A’B’C’	A’B’	A’C’	B’C’

est un tableau de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité est k.

Propriété 4 :

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles alors ces triangles sont semblables.

Remarque :

- Le coefficient k permet de calculer les longueurs du « grand » triangle à partir des longueurs du « petit » triangle.
- Le coefficient k’ permet de faire l’inverse et on a toujours kk’ = 1

Méthode 1 :

Pour démontrer que deux triangles sont semblables, il suffit donc de montrer qu’ils ont :

- 3 côtés deux à deux proportionnelles

  OU

- 2 paires d’angles de même mesure

  OU

- un angle compris entre deux côtés respectivement proportionnels.

II. Le théorème de Thalès

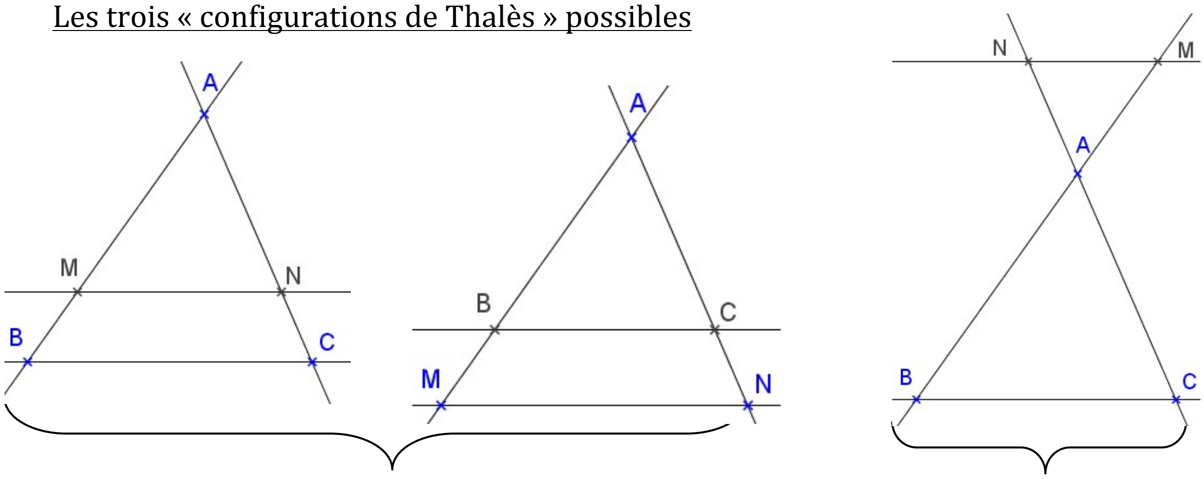
Théorème 1 :

Dans un triangle ABC,

- Si M appartient au segment [AB] et N appartient au segment [AC]
- et si les triangles ABC et AMN sont semblables, autrement dit, si les droites (MN) et (BC) sont parallèles ;

alors on peut écrire : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ou $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

Les trois « configurations de Thalès » possibles

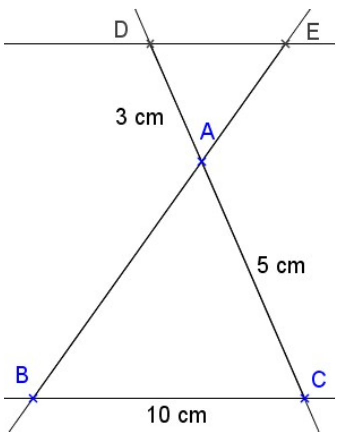


Configurations classiques Configuration dite du « papillon »

Remarque :

- Le théorème de Thalès sert à calculer des longueurs.

Exemple :



Sur la figure ci-contre, les droites (DE) et (BC) sont parallèles et les droites (BE) et (DC) sont sécantes en A.
Calculer ED.

❖ On sait que : (DE)//(BC) et que (DC) et (BE) sont sécantes en A.

❖ Or, d'après le théorème « direct » de Thalès, on a :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

❖ On remplace par les données :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{3}{5} = \frac{ED}{10}$$

❖ D'après l'égalité des produits en croix, on a :

$$5 \times ED = 3 \times 10 \text{ d'où } ED = \frac{3 \times 10}{5} \text{ et donc } ED = 6 .$$

La longueur ED vaut 6 cm.

III. La réciproque du théorème de Thalès

Théorème 2 :

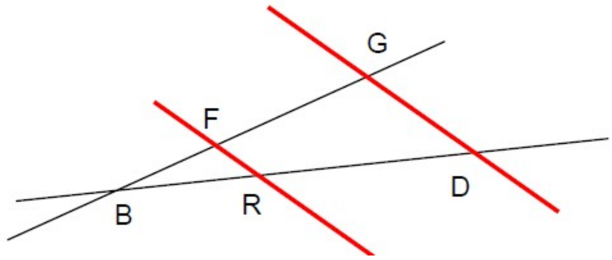
Si les points A, B et M sont alignés dans le même ordre que les points A, C et N
ET

Si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, (ou $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$)

Alors, les droites (MN) et (BC) sont parallèles

Exemple

Sur la figure ci-contre, les droites (BG) et (BD) sont sécantes en B, et on a : $BG = 4,9\,cm$ *;* $BF = 3,5\,cm$ *;*
$BD = 5,6\,cm$ *;*
$BR = 4\,cm$*.*
Montrer que les droites (RF) et (DG) sont parallèles.



- On sait que : les points B,F et G sont alignés dans le même ordre que les points B, R et D
- De plus, $\frac{BD}{BR}=\frac{5,6}{4}=1,4$ et $\frac{BG}{BF}=\frac{4,9}{3,5}=1,4$ donc $\frac{BD}{BR}=\frac{BG}{BF}$
- Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (RF) et (DG) sont parallèles.

Remarques et conséquences :

- Le théorème de la droite des milieux : « Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté du triangle » est un cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès.

En effet, A,I et B sont alignés dans le même ordre que les points A, J et C.
On a : $\frac{AI}{AB}=\frac{AJ}{AC}=\frac{1}{2}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

- Lorsque les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A :

Si $\frac{AM}{AB}\neq\frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles. (C'est la propriété contraposée)

I. Expression littérale

Définition 1 :

Une expression littérale est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont désignés par des lettres.

Exemples :

- L'aire A d'un rectangle de longueur L et de largeur l peut s'écrire : $A = L \times l$

On dit que l'on a exprimé l'aire du rectangle en fonction de L et de l

- Soit le programme de calcul suivant :
  « Je choisis un nombre a. Je le multiplie par 10. J'ajoute 2 au produit obtenu »
  Ce programme de calcul peut être traduit par l'expression : $a \times 10 + 2$

Convention d'écriture

On peut ne pas écrire le signe $\times$ devant une lettre ou devant une parenthèse.

Exemple :

$4 \times \mathrm{a} = 4\mathrm{a}$ $\qquad$ $5 \times (10 + 27) = 5(10 + 27)$

Règle 1 :

x et y sont des nombres relatifs :

$$(-x) \times y = x \times (-y) = -xy \quad \text{et} \quad (-x) \times (-y) = x \times y = xy$$

Exemples :

$A = (-3) \times x$
$A = -3x$

$B = (-x) \times (-4)$
$B = 4x$

$C = (-1) \times x$
$C = -1x$
$C = -x$

Vocabulaire :

Pour réduire une somme, on regroupe les termes de la même famille puis on les ajoute ensemble.

Remarque :

On trouve en général trois types de familles, les x, les x^2 et les constantes (les nombres « tout seul »)…mais il en existe bien d'autres.

Exemple :

$A = -5x^2 + (-3x) - 8 - 9x^2 + x - 1$
$A = -5x^2 - 3x - 8 - 9x^2 + x - 1$
$A = -5x^2 - 9x^2 - 3x + x - 8 - 1$
$A = -14x^2 - 2x - 9$

« On ne peut pas ajouter deux termes de familles différentes »

II. Développer

Définition 2 :

Développer, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence).

a) Développer avec la simple distributivité

Propriété 1 :

On considère des nombres relatifs a,b et k, on a :

$$k(a+b)=ka+kb \qquad k(a-b)=ka-kb$$

Exemples :

$B=2\times(3x-2)$
$B=2\times 3x-2\times 2$
$B=6x-4$

$C=5x(2x-3)$
$C=5x\times 2x-5x\times 3$
$C=10x^2-15x$

$D=-7(2-x)$
$D=-7\times 2-7\times(-x)$
$D=-14+7x$
$D=7x-14$

b) Développer avec la double distributivité

Propriété 2 :

On considère des nombres relatifs a,b,c et d, on a :

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Exemples :

$E=(2x+7)(3x+9)$
$E=2x\times 3x+2x\times 9+7\times 3x+7\times 9$
$E=6x^2+18x+21x+63$
$E=6x^2+39x+63$

$F=(4x-3)(2x+5)$
$F=4x\times 2x+4x\times 5-3\times 2x-$
$F=8x^2+20x-6x-15$
$F=8x^2+14x-15$

On développe comme si on avait $F=(4x+(-3))(2x+5)$

Attention au signe $-$ devant une double distributivité, il faut ensuite développer entre des crochets pour

$G=(7x-1)-(5x-8)(3x-7)$
$G=(7x-1)-[5x\times 3x+5x\times(-7)-8\times 3x-8\times(-7)]$
$G=7x-1-[15x^2-35x-24x+56]$
$G=7x-1-15x^2+35x+24x-56$
$G=-15x^2+7x+35x+24x-1-56$
$G=-15x^2+66x-57$

III. Factoriser avec un facteur commun

Définition 3 :

Factoriser, c'est transformer une somme (ou une différence) en un produit.

Remarque :
C'est « l'opération inverse » de développer

Propriété 3 :

Soient A, B et C trois expressions (littérales ou non), on a alors :

$(A)\times(B)+(A)\times(C)=(A)\times[(B)+(C)]$ et $(A)\times(B)-(A)\times(C)=(A)\times[(B)-(C)]$

Dans les deux cas, l'expression (A) est le facteur commun aux produits $(A)\times(B)$ et $(A)\times(C)$

Exemples :

$$K=3\times44-3\times4$$
$$K=3\times(44-4)$$
$$K=3\times40$$
$$K=120$$

$$L=7x+56$$
$$L=7\times x+7\times8$$
$$L=7(x+8)$$

$$M=(4x+5)^2+(2x-3)(4x+5)$$
$$M=(4x+5)(4x+5)+(2x-3)(4x+5)$$
$$M=(4x+5)[(4x+5)+(2x-3)]$$
$$M=(4x+5)(4x+2x+5-3)$$
$$M=(4x+5)(6x+2)$$

I. Des isométries

Des isométries sont des transformations du plan, le mot transformation ayant non sa signification courante mais mathématiques puisqu'au sens habituel du mot, une isométrie ne « transforme » rien du tout et conserve « tout » et notamment la forme et les grandeurs.

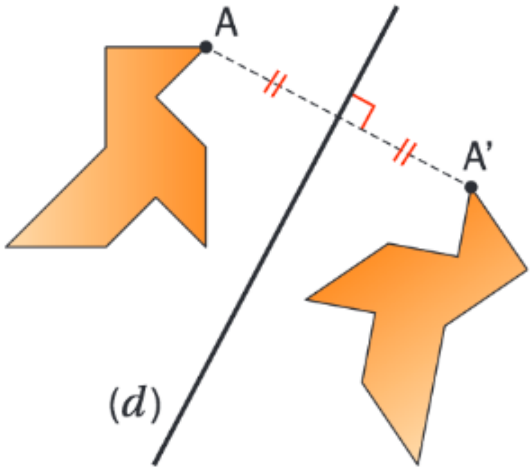
a) Symétrie axiale

Définition 1 :

Deux figures sont symétriques par rapport à une droite si **en pliant** suivant cette droite les deux **figures se superposent**.
Cette droite est appelée **l'axe de la symétrie**.

Autrement dit :

Transformer une figure par symétrie axiale, c'est la retourner en pliant le long d'une droite.

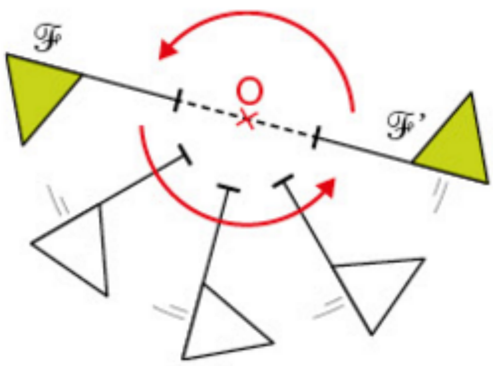


Le symétrique du point A par rapport à la droit (d) est le point A' tel quel que (d) soit la médiatrice de [AA'].

b) Symétrie centrale

Définition 2:

On dit que deux points A et B sont symétriques par rapport à un point O lorsque le point O est le milieu du segment [AB].



Autrement dit :

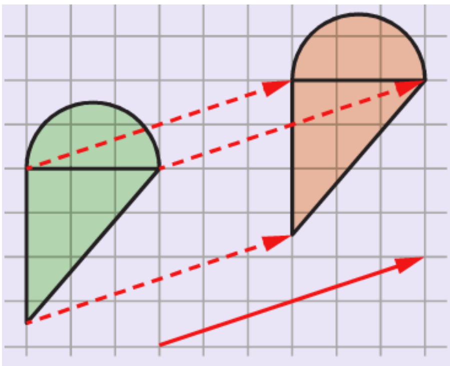
Transformer une figure par symétrie centrale, c'est la faire tourner d'un demi-tour autour d'un point O.

Remarque :

Le point O est le centre de symétrie de la figure.

c) Translation

Définition 3 :



Transformer une figure par translation, c'est la faire glisser sans la tourner.
Ce glissement est défini par une direction, un sens et une longueur.
On peut schématiser ce glissement par des flèches.

Remarque :

La flèche qui détermine la direction, le sens et la longueur de la translation est appelée vecteur de la translation.

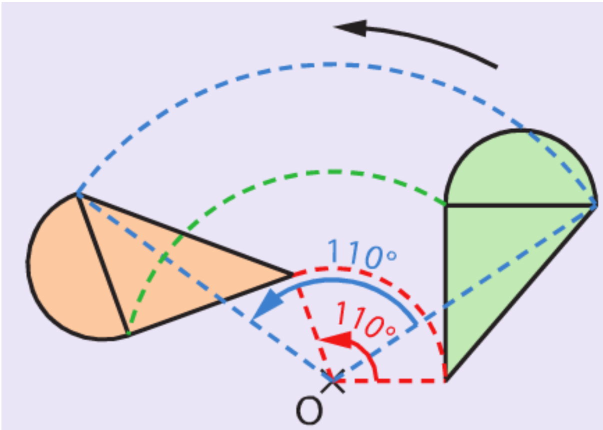
d) Rotation

Définition 4 :

Transformer une figure par rotation, c'est la faire tourner autour d'un point fixe qui est le centre de la rotation.
Une rotation est définie par un centre, un angle de rotation et un sens de rotation (horaire comme le sens des aiguilles d'une montre ou bien anti-horaire).

Remarque :

- La rotation de centre O et d'angle 180° est la symétrie centrale de centre O.



Propriété 1 :

Les symétries axiales et centrales, les translations et les rotations sont des isométries : elles conservent les alignements de points, les mesures des angles, les longueurs et les aires des figures.

Remarque :

Une figure et son image par une isométrie sont superposables.

II. Les homothéties

Définition 5 :

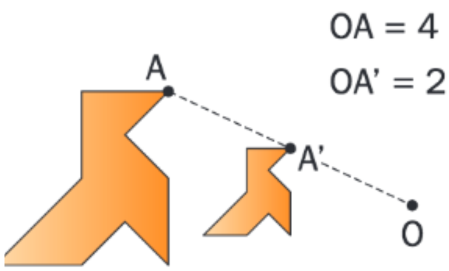
Soit un point O.

Transformer une figure par une homothétie de centre O, c'est l'agrandir ou la réduire en faisant glisser ses points le long de droites passant par O.

Une homothétie est définie par :

- un centre ;
- un rapport k $\neq 0$

Exemple :

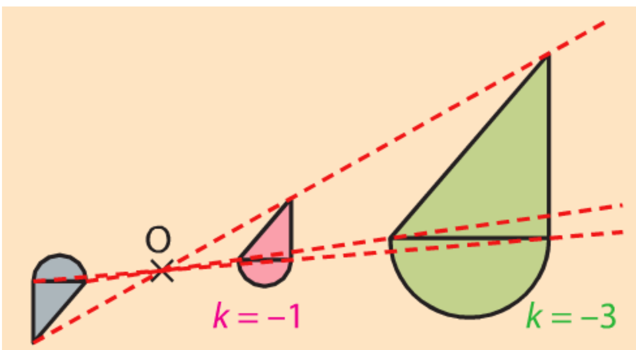


L'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport 0,5 est le point A' tel que les points O, A et A' sont alignés et $OA' = 0{,}5 \times OA$

On note aussi : $h_{O,0,5}(A) = A'$

Remarques :

- Une homothétie de rapport égale à -1 est une symétrie centrale
- Dans une homothétie, un point, son image et le centre de l'homothétie sont toujours alignés.
- Le centre de l'homothétie est sa propre image (c'est un point fixe ou invariant).
- Lorsque le rapport d'une homothétie est négatif, la figure effectue un demi-tour autour du centre :



Propriété 2 :

- Une figure et son image par une homothétie ont la même forme
- Les homothéties conservent l'alignement des points et la mesure des angles
- Une homothétie de rapport k > 0 multiplie les longueurs par k et les aires par k^2.

Remarque :

La dernière propriété indique entre autre que les longueurs d'une figure et celles de son image par une homothétie sont proportionnelles et le coefficient de proportionnalité est le coefficient k de l'homothétie

III. Triangles homothétiques et configuration de Thalès

Propriété 3 :

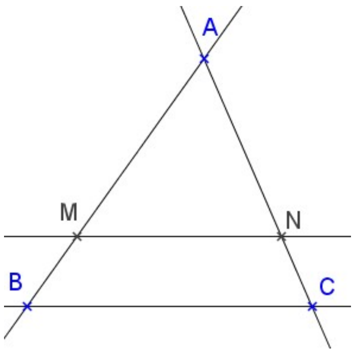
Soit ABC un triangle tel que M soit sur (AB) et N sur (AC).
Si (MN) est parallèles à (BC) alors l'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N.

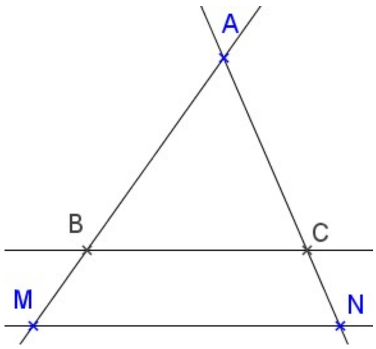
Les triangles ABC et AMN sont dits homothétiques, ils sont dans la configuration de Thalès.

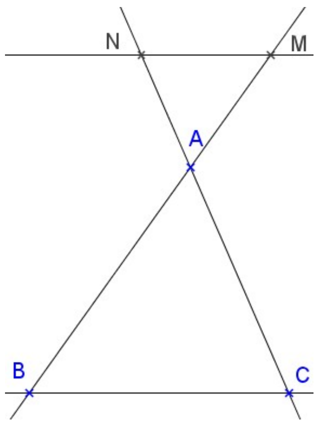
Remarque :

Le rapport k de l'homothétie est donné par le théorème de Thalès :

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



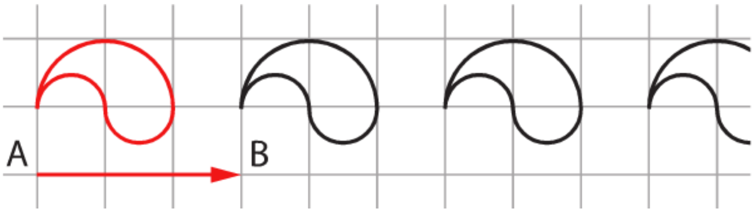




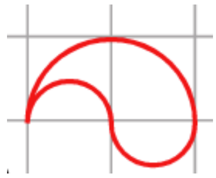
IV. Frises, pavages et rosaces

Définition 6 :

Une frise est constituée d’un motif qui est reproduit dans une seule direction par translation.

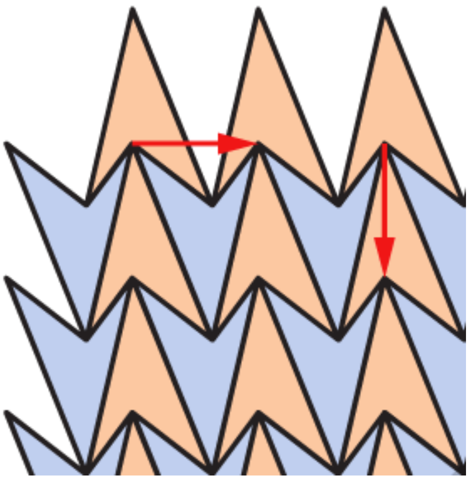


MOTIF



Définition 7 :

Un pavage est constitué d’un motif qui est reproduit dans deux direction par des translations et qui recouvre le plan sans trous ni superposition.

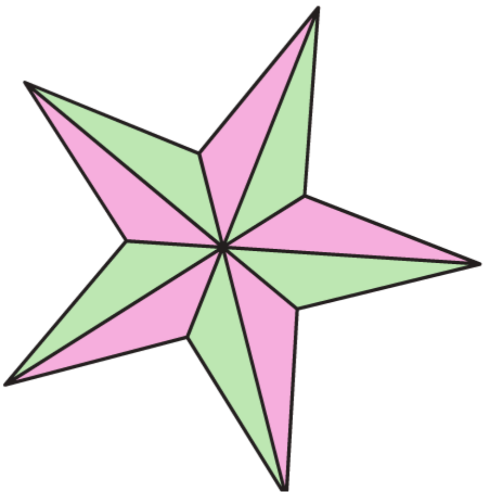


Motif

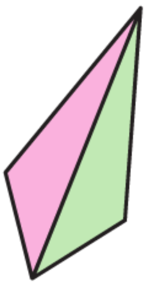
Ce motif est lui-même constitué du motif élémentaire ci-dessous reproduit par symétrie centrale.

Définition 8 :

Une rosace est constituée d’un motif qui est reproduit plusieurs fois par rotation.



Motif



Ce motif est lui même constitué d’un motif élémentaire reproduit par symétrie axiale (ci-dessous)

Les fonctions constituent un outil mathématique d'une utilisation quasiment universelle (téléphone portable, GPS, lecteur MP3, télévision…) que vous étudierez de manière plus approfondie au lycée.
Il faut savoir que le mot fonction est emprunté sous la forme simplifié funcion *(1370) au latin* functio *"accomplissement, exécution." C'est Leibniz (1646-1716) qui utilise le mot fonction pour la première fois en mathématiques en 1673, mais la première définition fut donnée par J.Bernouilli (1654-1705).*
Pour le symbole f(x), (qui se lit « f de x ») il a été introduit par Euler en 1734 dans Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae.

I. Notion de fonction

Définition 1 :

Une fonction est un processus (« une machine » ou une « chaîne de machines ») qui, à un nombre, fait correspondre un unique autre nombre
Si f est le nom de la fonction, au nombre x, elle fait correspondre son image qu'on note $f(x)$ (qu'on lit « f de x »).
On dit que x est un antécédent de $f(x)$.

Illustration et remarques

La notation $x \mapsto f(x)$ est la traduction de l'image ci-contre et se lit : « $f(x)$ est l'image de x par la fonction f »
ou encore, « x est un antécédent de $f(x)$ par la fonction f »

Exemples :

Soit f une fonction associant au nombre de départ, son carré augmenté de 1.

On la note $f : x \mapsto x^2+1$ ou bien

$f(x) = x^2+1$

On a alors :

$f(3) = 3^2+1 = 9+1 = 10$ « 10 est l'image de 3 par la fonction f »

$f(2) = 2^2+1 = 4+1 = 5$ « 2 est un antécédent de 5 par la fonction f

Attention, un nombre peut avoir plusieurs antécédents mais une seule et unique image.

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ « -2 est aussi un antécédent de 5 !! »

Soit g la fonction qui à x associe son double.

On la note $g : x \mapsto 2x$

Alors l'image de 5 est g(5) = 2 × 5 = 10
L'image de (-3) est g(- 3) = 2 × (- 3) = - 6
L'antécédent de 8 par g est x = 8 ÷ 2 = 4

Remarque :

il existe trois façons de déterminer une fonction : par **sa forme algébrique (la formule**), par **un tableau** ou par **un graphique**.

II. Représentation d'une fonction

On a vu dans le premier exemple la fonction f sous sa forme algébrique : $f : x \mapsto x^2 + 1$.

Déterminons cette fonction par un tableau :

a) A partir d'un tableau de données

Antécédent	x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	0	1	1,5	2	3
image	$f(x)$	10	5	3,25	2	1	2	3,25	5	10

De manière générale, un tableau de données de ce type là indique certaines images d'une fonction f.
Cependant, par ce procédé, on obtient que quelques images et la fonction f n'est connue qu'en partie.
On ne peut donc pas tracer avec précision le graphique de la fonction f.

b) A partir d'un graphique

Avant toute chose, il faut choisir un repère.

Propriété 1 :

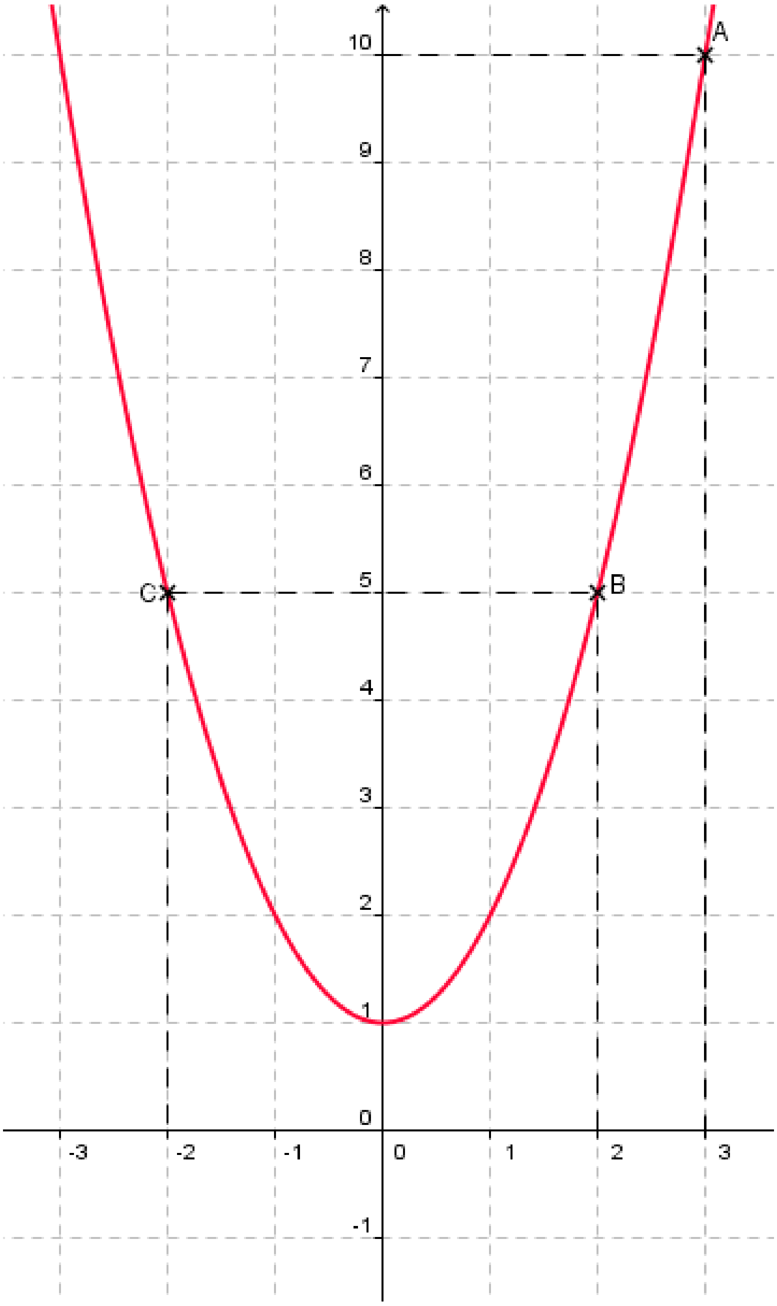
La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ; f(x))$.

Exemple :

Puisque $f(3)=10$ le point A(3 ; 10) appartient à la courbe.

Comme 5 a deux antécédents qui sont 2 et -2, les points
B(2 ; 5) et C(-2 ; 5) appartiennent aussi à la courbe.

Pour trouver l'image de 1 par la fonction f, il faut trouver le point sur la courbe qui a pour abscisse 1.
L'ordonnée de ce point est 2 et on a donc que « l'image de 1 par la fonction f est 2 ».



Les valeurs lues sur un graphique ne sont pas toujours des valeurs exactes. Il s'agit le plus souvent de valeurs approchées.

Exemple :
Graphiquement, on trouve que : l'image de 1,5 est environ 3,2.

Par le calcul, on trouve que : l'image de 1,5 est $1,5^2+1=3,25$

$\Rightarrow$ une lecture graphique n'est pas aussi rigoureuse qu'un calcul.

I. Vocabulaire statistique

Définition 1 :

- Une étude statistique porte sur une population, que l'on appelle aussi population statistique.
- Le nombre d'individus de cette population s'appelle l'effectif total.
- L'ensemble des données statistiques que l'on étudie est le caractère, que l'on appelle aussi caractère statistique.
- Une série statistique est un tableau avec :
  - en première ligne, les valeurs du caractère statistique étudié
  - en deuxième ligne, l'effectif de la valeur.

Exemple :

On étudie la répartition des salaires mensuels d'une petite start-up (spécialisée dans la conception de jeux vidéos) de 15 personnes (il faut du monde : des programmeurs, des dessinateurs, des designers du son…) :

2000 2200 2200 2100 2500 2000 2500 2000 3000 2200 2100 2000 2100 2000 2100

- La population étudiée : il s'agit des 15 personnes salariées de l'entreprise.
- L'effectif total est 15.
- Le caractère étudié est le salaire mensuel.
- La série statistique de l'étude ci-contre :

Salaire (en€)	2000	2100	2200	2500	3000
Effectif	5	4	3	2	1

II. Calculs de moyennes

a) Moyenne simple

Définition 2 :

La moyenne simple d'une série de données est égale au quotient de la somme de ces données par l'effectif total :

$$\text{moyenne} = \frac{\text{somme des données}}{\text{effectif total}}$$

Remarque :

- La moyenne d'une série de données n'est pas forcément égale à l'une des données.
- La moyenne est toujours comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de la série.

Exemple :

Calcul de la **« moyenne simple »** m des salaires mensuels :

$$m = \frac{2000+2200+2200+2100+2500+2000+2500+2000+3000+2200+2100+2000+2100+2000+2100}{15}$$

$$m = \frac{33000}{15} = 2200$$

Le salaire moyen dans cette start-up est de 2 200 € par mois.

b) Moyenne pondérée

Définition 3 :

La moyenne pondérée d'une série de données est égale à la somme des produits de chaque valeur par son effectif divisée par l'effectif total :

$$\text{Moyenne pondérée} = \frac{\text{somme des produits des valeurs par leurs effectifs}}{\text{effectif total}}$$

Exemple :

Calcul de la **moyenne pondérée** M des salaires mensuels :

$$M = \frac{2000\cdot 5 + 2100\cdot 4 + 2200\cdot 3 + 2500\cdot 2 + 3000\cdot 1}{5+4+3+2+1}$$

$$M = 2200$$

Le salaire moyen dans cette entreprise est de 2200€ par mois.

c) Fréquence

Définition 4 :

La fréquence d'une donnée est le quotient de son effectif par l'effectif total :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la donnée}}{\text{effectif total}}$$

Remarques :

- Une fréquence peut être donnée sous forme de fraction, de nombre décimal ou de pourcentage
- Une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1.
- La somme de toutes les fréquences est égale à 1

Exemple :

Calcul de la **fréquence** du salaire 2200€ :

$f = \dfrac{3}{15}$ soit $f = 0,2$ donc $f = 20\%$

Cela signifie que dans l'entreprise, 20% des salariés touchent 2200€ par mois.

d) Moyenne d'une série regroupée en classes

Méthode 1 :

Pour calculer la moyenne d'une série de données dont les valeurs sont regroupées en classes ;
- On calcule le centre de chaque classe en faisant la moyenne des valeurs extrêmes de la classe ;
- On calcule la moyenne de la série en prenant comme valeurs les centres des classes

Exemple:

On demande à des élèves de 5è combien de SMS ils envoient par jour.

On regroupe les données dans le tableau d'effectif suivant :

Nombre n de SMS	$0 \leqslant n < 30$	$30 \leqslant n < 60$	$60 \leqslant n < 90$	$90 \leqslant n < 120$	$120 \leqslant n < 150$
Effectif	2	6	10	5	1

6 élèves envoient entre 30 et 59 SMS par jour.

Ici, on a regroupé les données en classes d'amplitude 30.

Le centre de la première classe est : $\dfrac{0+30}{2} = 15$

Le centre de la deuxième classe est : $\dfrac{30+60}{2} = 45$ ....etc

On a donc $M = \dfrac{15\times 2 + 45\times 6 + 75\times 10 + 105\times 5 + 135\times 1}{2+6+10+5+1} = \dfrac{1710}{24} = 71,25$

Le nombre moyen de SMS envoyé chaque jour par des élèves de 5è est de 71, 25.

III. Médiane et étendue d'une série statistique

a) Médiane

Définition 5 :

La médiane Med d'une série statistique dont <u>les valeurs sont ordonnées</u> (de la plus petite à la plus grande ou de la plus grande à la plus petite) est un nombre (pas forcément dans la série) qui partage cette série en deux groupes de même effectif, de telle sorte que :

- Au moins la moitié des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Med
- Au moins la moitié des valeurs de la série sont supérieures ou égales à Med.

Exemple :
On range dans l'ordre croissant la série statistique que nous avons étudiée précédemment :

$$\underbrace{2000\quad 2000\quad 2000\quad 2000\quad 2000\quad 2100\quad 2100}_{\text{7 valeurs}}\quad \underset{\text{Médiane}}{\underset{\Downarrow}{2100}}\quad \underbrace{2100\quad 2200\quad 2200\quad 2200\quad 2500\quad 2500\quad 3000}_{\text{7 valeurs}}$$

Méthode 2 :

Pour trouver la médiane d'une série statistiques :

1) On range les valeurs de la série dans l'ordre (croissant ou décroissant)
2) On cherche la valeur centrale qui partage la série en deux séries de même effectif
3) Si la série a un effectif impair la médiane est une valeur de la série
   Si la série a un effectif pair la médiane est la moyenne des « valeurs centrales »

Remarque :

La médiane ne dépend pas des valeurs extrêmes de la série.

b) Etendue

Définition 6 :

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs de la série.

Remarque :
L'étendue est une mesure de dispersion des valeurs : plus l'étendue est grande, plus les valeurs sont dispersées. Cela donne quelques indications sur la série statistique étudiée.

Exemple :
L'étendue E de la série statistique étudiée est : $E = 3000 \quad 2000$ soit $E = 1000$.
On peut donc en déduire qu'il y a une grande disparité entre les salaires extrêmes au sein de cette entreprise, mais cela s'explique de manière tout à fait logique par le fait que le patron va gagner plus d'argent que ses employés.
Il faut garder à l'esprit de toujours analyser au mieux les résultats que l'on obtient, notamment en statistiques.

IV. Représentations graphiques

a) Diagramme en bâtons ou en barres

Définition 5 :

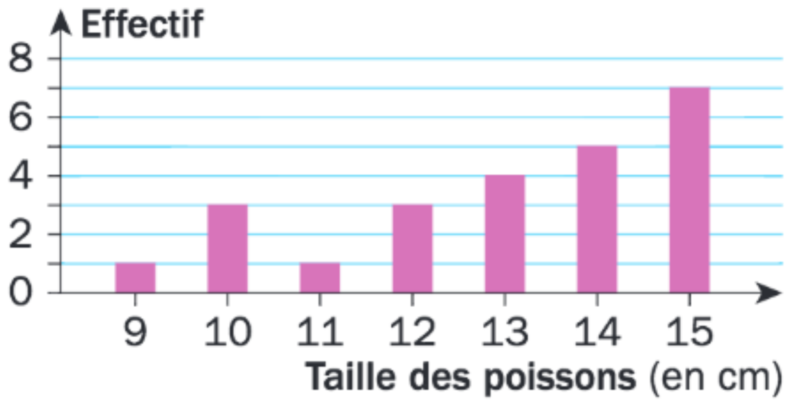
Un diagramme en bâtons (ou en barres) est composé de bâtons de même largeur et dont la hauteur est proportionnelle aux effectifs (ou fréquences) qu'ils représentent.

Remarque :

- On lit l'effectif que l'axe vertical
- On place les données étudiées sur l'axe horizontal
- On donne un titre au graphique
- On peut représenter des données quantitatives (numériques) ou qualitatives (non numériques)

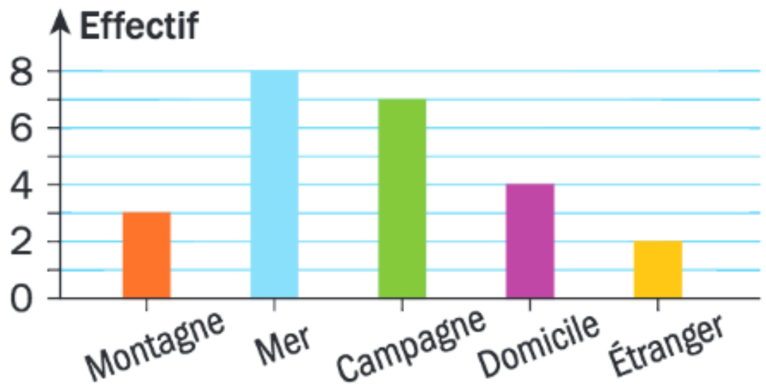
Exemple :

Un pêcheur a mesuré la taille des poissons d'une même espèce remontée dans ses filets :



Répartition des poissons pêchés par tailles

Avec l'exemple des vacances des élèves de 5è :



Répartition de s lieux de vacances des élèves de 5è

b) histogramme

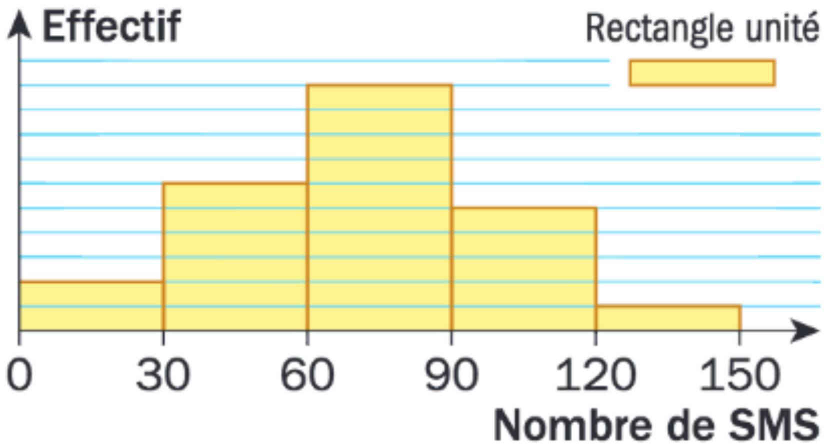
On utilise un histogramme pour représenter des **données numériques regroupées en classe**.

Propriété 1 :

Dans un histogramme, chaque classe est représentée par un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif (ou fréquence).

Si toutes les classes on la même amplitude, les rectangles ont la même largeur et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de la classe qu'ils représentent.

Exemple :



Histogramme des SMS envoyées par des élèves de 5è

c) Diagrammes circulaires et en bandes

Définition 6 :

Un diagramme circulaire est un disque partagé en secteurs circulaires.
L'angle de chaque secteur est proportionnel à l'effectif qu'il représente.

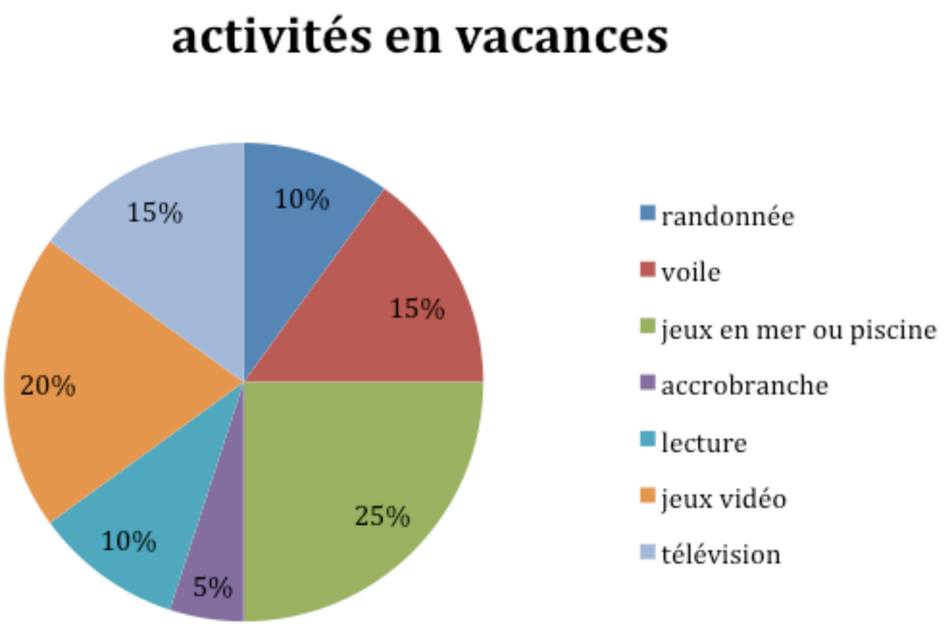
On utilise ce type de diagramme pour représenter des données non numériques.
Ce type de diagramme permet de mettre en évidence la répartition des données selon plusieurs catégories.

Propriété 2 :

Dans un diagramme circulaire (ou semi-circulaire), les mesures des angles sont proportionnelles aux nombres ou aux pourcentages qu'ils représentent.

Exemple :

On a demandé à des jeunes collégiens quelles étaient leurs activités en vacances et voici leurs réponses :



Méthode de construction d'un diagramme circulaire :

Le but est de connaître en degrés la part du disque.

Puisque l'ensemble du disque équivaut à 100% (ou à la somme des nombres)

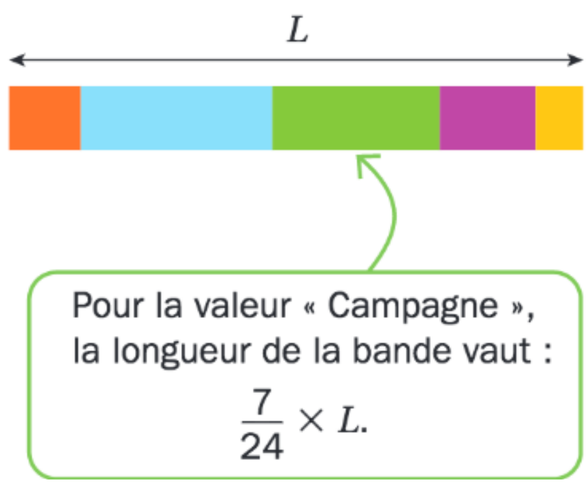
360° équivalent à 100% (ou à la somme des nombres) donc 1% équivaut à 3.6°
(ou bien une unité équivaut à 360° / somme des nombres)

Il faudra donc multiplier chaque pourcentage par 3.6 pour connaître la mesure de l'angle qui représentera la proportion.

Définition 7 :

Un diagramme en bandes est un rectangle partagé en rectangles appelées bandes.
La longueur de chaque bande est proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence) qu'elle représente.

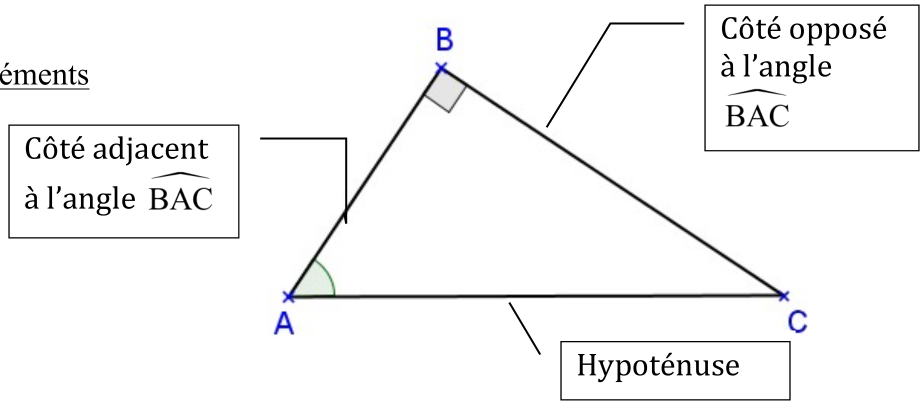
Exemple :



I. Rapports trigonométriques

a) Vocabulaire-rappels et compléments

ABC un triangle rectangle en B :



Les deux angles d'un triangle rectangle qui ne sont pas droits, sont forcément des angles aigus.
$0° < \widehat{BAC} < 90°$ et $0° < \widehat{BCA} < 90°$

De plus, comme la somme des angles d'un triangle est égale à 180°,
on a : $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 90°$ (Angles complémentaires)

On ne peut parler « d'hypoténuse » que lorsqu'on sait qu'on est dans un triangle rectangle.

Remarque :

Lorsqu'on veut utiliser les rapports trigonométriques dans un triangle, il faut d'abord prouver qu'on a un triangle rectangle à l'aide du théorème de Pythagore ou bien en travaillant avec les hauteurs d'un triangle ou bien encore avec des droites perpendiculaires.

b) Formules de trigonométrie

Définition 1-Cosinus :

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient $\dfrac{\textbf{longueur du Côté Adjacent}}{\textbf{longueur de l'ypoténuse}}$

Exemples :

Dans le triangle ABC rectangle en B ci-dessus, on a : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AB}{AC}$ et $\cos(\widehat{BCA}) = \dfrac{BC}{AC}$

Définition 2 -Sinus:

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au quotient $\dfrac{\textbf{longueur du Côté Opposé}}{\textbf{longueur de l'ypoténuse}}$

Exemples :

Dans le triangle ABC rectangle en B ci-dessus, on a : $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AC}$ et $\sin(\widehat{BCA}) = \dfrac{AB}{AC}$

Définition 3 -Tangente:

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au quotient $\dfrac{\textbf{longueur du Côté Opposé}}{\textbf{longueur du Côté Adjacent}}$

Exemples :

Dans le triangle ABC rectangle en B ci-dessus, on a : $\tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{BA}$ et $\tan(\widehat{BCA}) = \dfrac{BA}{BC}$

Propriétés :

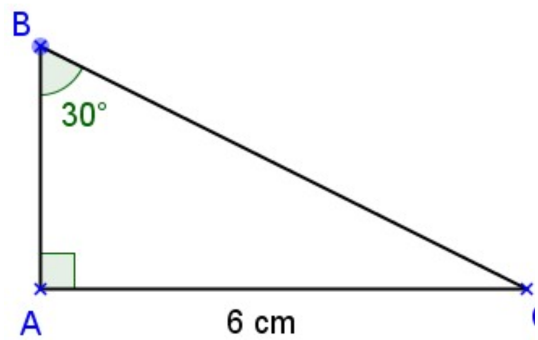
- Le cosinus, le sinus et la tangente sont des divisions de longueurs, ils n'ont donc pas d'unités.
- Les longueurs étant toujours strictement positives, un cosinus, un sinus et une tangente le sont aussi. De plus, les côtés adjacents et opposés auront toujours des longueurs inférieures à celle de l'hypoténuse donc le cosinus et le sinus seront toujours plus petit que 1.
- $\tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{\tan(\widehat{BCA})}$
- Soit x la mesure en degré d'un angle aigu, on a alors : $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$
- Soit x la mesure en degré d'un angle aigu, on a alors : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

c) Moyen mnémotechnique

Il existe un moyen mnémotechnique pour retrouver les formules de trigonométrie :

Cos = **A**dj/**H**yp; **S**in = **O**pp/**H**yp; **T**an = **O**pp/**A**dj. Ce qui donne le « mot » : CAH SOH TOA

II. Calculer une longueur



Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AC = 6 cm et $\widehat{ABC} = 30°$.
Calculer BC.

On connait la mesure d'un angle et la valeur de son côté opposé.
On souhaite calculer l'hypoténuse, on va donc utiliser le sinus.

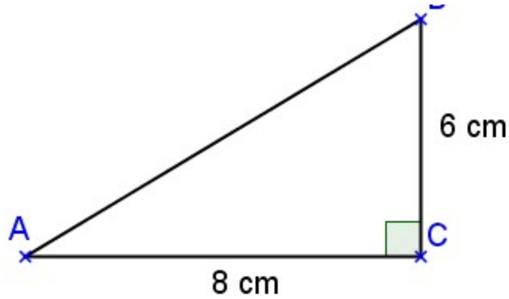
On sait que : ABC est un triangle rectangle en A, AC = 6 cm et $\widehat{ABC} = 30°$

Or, $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$ soit $\sin(30°) = \dfrac{6}{BC}$ donc $\dfrac{\sin(30°)}{1} = \dfrac{6}{BC}$ et par l'égalité des produits en croix, on a :

$BC \times \sin(30°) = 1 \times 6$ d'où $BC = \dfrac{1 \times 6}{\sin(30°)}$

Donc, BC = 12 cm. *(Il faut attendre le dernier moment pour arrondir)*
Le segment [BC] mesure 12 cm.

III. Calculer la mesure d'un angle



Soit ABC un triangle rectangle en C tel que BC = 6 cm et AC = 8 cm.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$

On connait les côtés opposés et adjacents à l'angle dont on cherche la mesure.
On va donc utiliser la tangente.

<u>On sait que</u> : ABC est un triangle rectangle en C, AC = 8 cm et BC = 6 cm.

$$\tan(\widehat{\mathrm{ABC}}) = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$

<u>Or</u>,

$$\tan(\widehat{\mathrm{ABC}}) = \frac{6}{8} \Rightarrow \widehat{\mathrm{ABC}} = \tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) \approx 53°$$

<u>Donc,</u> l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ mesure environ 53°.

I. Fonction linéaire

a) Fonction linéaire et proportionnalité

Définition 1 :

Dans un tableau, deux quantités X et Y sont dites proportionnelles lorsque qu'il existe un nombre , non nul, tel que : Y= a X.

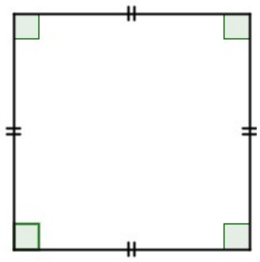
Le nombre a est appelé coefficient de proportionnalité.

A chaque situation de proportionnalité correspond une fonction f définie par $f : x \mapsto ax$.

On dit alors que cette fonction linéaire modélise la situation de proportionnalité.

Exemple :

On considère le carré de côté x ci-contre.
Le périmètre du carré est proportionnel à la longueur de son côté et le coefficient de proportionnalité est 4 :



Périmètre (en cm)	8	12	20
Longueur du côté (en cm)	2	3	5

$\times 4$

La fonction P qui modélise cette situation de proportionnalité est définie par :
$P(x) = 4x$ (ou $P : x \mapsto 4x$).

Remarque :

Dans cette situation x et $P(x)$ sont positifs car ce sont des longueurs, mais on peut pourtant calculer $P(-7)$. Cela montre que la fonction est la généralisation de la situation de proportionnalité.

b) Définition de fonction linéaire

Définition 2 :

Etant donné un nombre relatif a, le processus f qui à tout nombre x fait correspondre le produit de x par a, s'appelle fonction linéaire de coefficient a et on note : $f(x) = ax$

Remarque :

La fonction linéaire f définit ci-dessus peut être décrite par le processus : « je multiplie par a ».
Ce nombre a est aussi appelé « coefficient de linéarité ».

Dire qu'une fonction est linéaire revient à dire que les images sont proportionnelles aux antécédents.

Exemple 1 :

$f(x) = 3x$ est la fonction linéaire de coefficient 3.

On peut dresser le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	0	1	2
$f(x)$	-15	0	3	6

$\times 3$

Exemple 2 :

$f(x) = -2x$ est la fonction linéaire de coefficient -2

On peut dresser le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	0	1	2
$f(x)$	-10	0	-2	-4

$\times(-2)$

II. Représentation graphique

Définition 3 :

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ est constituée de tous les points de coordonnées $(x\ ;\ ax)$

Propriété 1 :

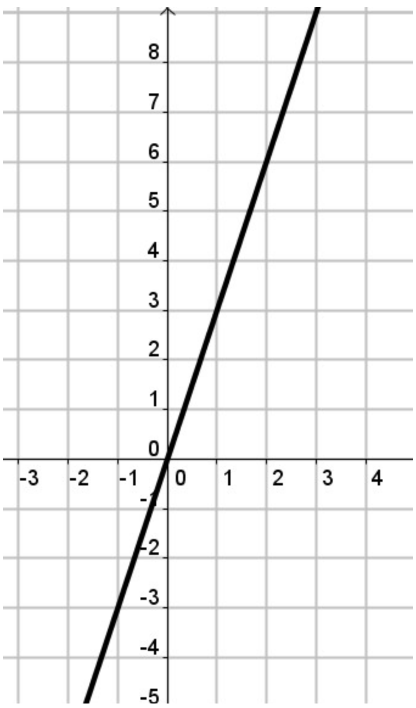
Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire $x \mapsto ax$ est une droite passant par l'origine du repère.

a est appelé le coefficient directeur de la droite

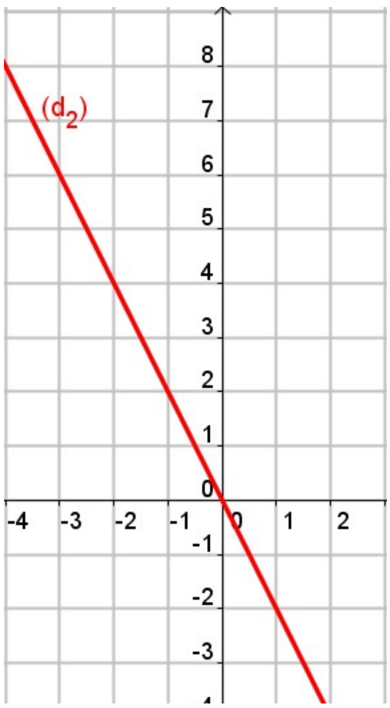
Exemples :

On reprend les exemples 1 et 2.
On appellera (d_1) la droite représentant la fonction linéaire $f(x) = 3x$ et (d_2) la droite représentant la fonction linéaire $f(x) = -2x$.

Exemple 1 : cas où $a > 0$



Exemple 2 : cas où $a < 0$



I. Fonction linéaire

a) Fonction linéaire et proportionnalité

Définition 1 :

Dans un tableau, deux quantités X et Y sont dites proportionnelles lorsque qu'il existe un nombre , non nul, tel que : Y= a X.

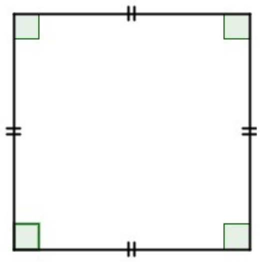
Le nombre a est appelé coefficient de proportionnalité.

A chaque situation de proportionnalité correspond une fonction f définie par $f : x \mapsto ax$.

On dit alors que cette fonction linéaire modélise la situation de proportionnalité.

Exemple :

On considère le carré de côté x ci-contre.
Le périmètre du carré est proportionnel à la longueur de son côté et le coefficient de proportionnalité est 4 :



Périmètre (en cm)	8	12	20
Longueur du côté (en cm)	2	3	5

$\times 4$

La fonction P qui modélise cette situation de proportionnalité est définie par :
$P(x) = 4x$ (ou $P : x \mapsto 4x$).

Remarque :

Dans cette situation x et $P(x)$ sont positifs car ce sont des longueurs, mais on peut pourtant calculer $P(-7)$. Cela montre que la fonction est la généralisation de la situation de proportionnalité.

b) Définition de fonction linéaire

Définition 2 :

Etant donné un nombre relatif a, le processus f qui à tout nombre x fait correspondre le produit de x par a, s'appelle fonction linéaire de coefficient a et on note : $f(x) = ax$

Remarque :

La fonction linéaire f définit ci-dessus peut être décrite par le processus : « je multiplie par a ».
Ce nombre a est aussi appelé « coefficient de linéarité ».

Dire qu'une fonction est linéaire revient à dire que les images sont proportionnelles aux antécédents.

Exemple 1 :

$f(x)=3x$ est la fonction linéaire de coefficient 3.

On peut dresser le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	0	1	2
$f(x)$	-15	0	3	6

$\times 3$

Exemple 2 :

$f(x)=-2x$ est la fonction linéaire de coefficient -2

On peut dresser le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	0	1	2
$f(x)$	-10	0	-2	-4

$\times(-2)$

II. Représentation graphique

Définition 3 :

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ est constituée de tous les points de coordonnées $(x\ ;\ ax)$

Propriété 1 :

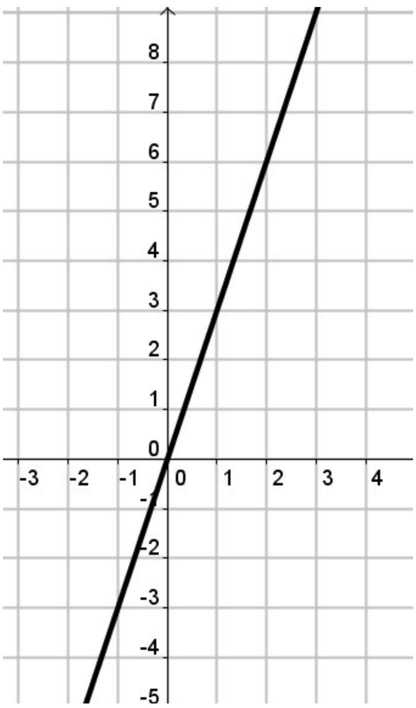
Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire $x \mapsto ax$ est une droite passant par l'origine du repère.

a est appelé le coefficient directeur de la droite

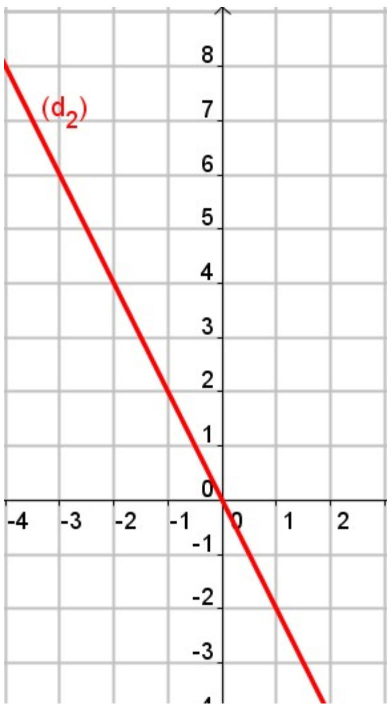
Exemples :

On reprend les exemples 1 et 2.
On appellera (d_1) la droite représentant la fonction linéaire $f(x)=3x$ et (d_2) la droite représentant la fonction linéaire $f(x)=-2x$.

Exemple 1 : cas où $a>0$



Exemple 2 : cas où $a<0$



Parmi les situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité, certaines sont cependant modélisables par une fonction dont la représentation graphique est une droite.

I. Fonction affine

Définition 1 :

Etant donné deux nombres relatifs a et b, le processus qui à tout nombre fait correspondre le nombre $ax+b$ s'appelle une fonction affine et on note $f : x \mapsto ax+b$.

Remarque :

- Une fonction affine f définie telle que ci-dessus peut-être associé au procédé : « je multiplie par a puis j'ajoute b ».
- Si $b=0$, alors on a la fonction linéaire $f(x)=ax$
- Si $a=0$, alors on a la fonction constante $f(x)=b$

Exemples :

$f(x)=3x-4$ est une fonction affine avec $a=3$ et $b=-4$

$g(x)=\dfrac{-2x+3}{7}=\dfrac{-2}{7}x+\dfrac{3}{7}$ est une fonction affine avec $a=\dfrac{-2}{7}$ et $b=\dfrac{3}{7}$

Application :

Un taxi lorsqu'il prend un client applique dès le départ un tarif dit de « prise en charge » d'un montant de $2,20€$. *A cela, s'ajoute à la charge du client, un tarif kilométrique , d'un montant de* $1,34€$ *par kilomètre parcouru.*
Traduisez le problème par une fonction affine puis déterminer combien devra payer un client de ce taxi pour parcourir 10 km.

❖ Le tarif que le client va devoir payer varie en fonction du nombre de kilomètre parcouru.
Soit x le nombre de kilomètre parcouru, $a=1,34$ et $b=2,20$. On obtient donc la fonction affine suivante : $f(x)=1,34x+2,20$.

❖ Calculons alors le prix à payer pour le client pour une course de 10 km.
Il s'agit de calculer $f(10)$, on a donc : $f(10)=1,34\times 10+2,20$ soit $f(10)=13,4+2,20$
donc $f(10)=15,60$ le client devra payer 15,60€ pour une course de 10 km.

II. Représentation graphique d'une fonction affine

Définition 2 :

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto ax+b$ est constituée de tous les points de coordonnées $\left(x\ ;\ ax+b\right)$.

Propriété 1 :

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine $f(x)=ax+b$ est une droite.
a est le coefficient directeur de la droite.
b est appelé l'ordonné à l'origine.

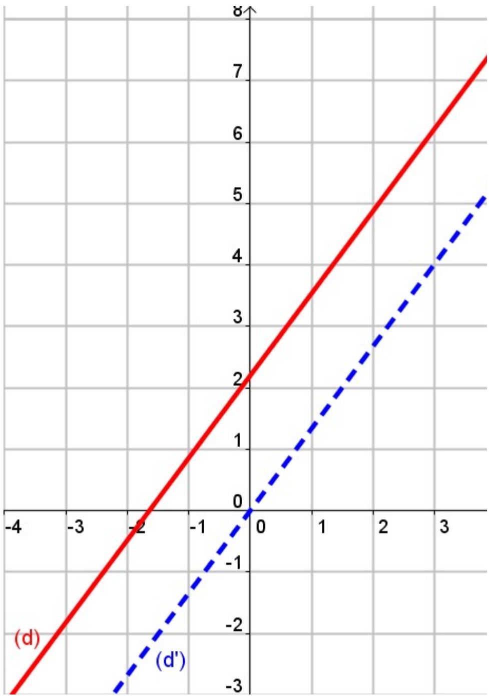
Propriété 2 :

Les droites qui représentent les fonctions $x \mapsto ax$ et $x \mapsto ax+b$ sont parallèles.

Exemple :

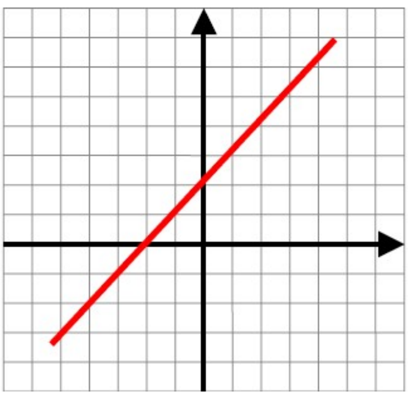
On reprend l'exemple précédant avec la fonction affine $f(x)=1,34x+2,20$, on note (d) sa représentation graphique dans un repère :

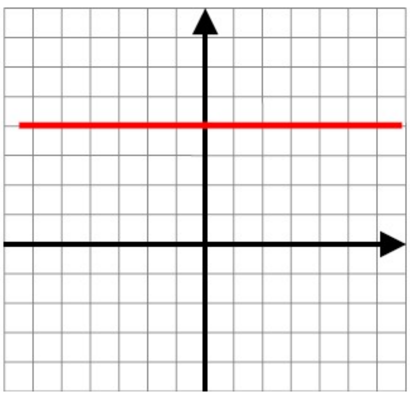
Si on note (d') la représentation graphique de la fonction linéaire $x \mapsto 1,34x$ alors (d) est parallèle à (d').

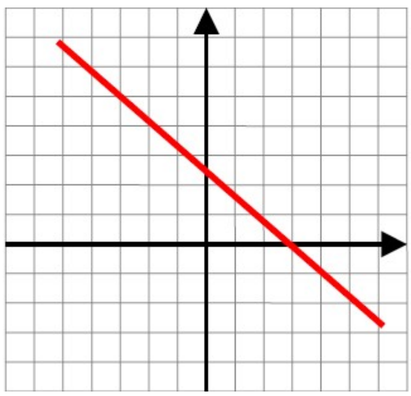


Allure de la droite selon la valeur du coefficient directeur a

$a>0$ $\quad$ $a=0$ $\quad$ $a<0$







III. Proportionnalité des accroissements

Propriété 3 :

Soit f une fonction affine $x \mapsto ax+b$. Les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels à ceux de x et on a pour $x_1 \neq x_2$:

$$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Remarque :

Cette propriété permet de calculer le nombre a en connaissant deux nombres et leurs images par la fonction f.
Cette propriété permet aussi à partir d'une représentation graphique d'obtenir la fonction affine qui lui correspond.

Méthode graphique :

Pour trouver le coefficient directeur d'une droite représentant une fonction affine, on peut choisir deux points de cette droite et calculer le quotient $\dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$

Exemple :

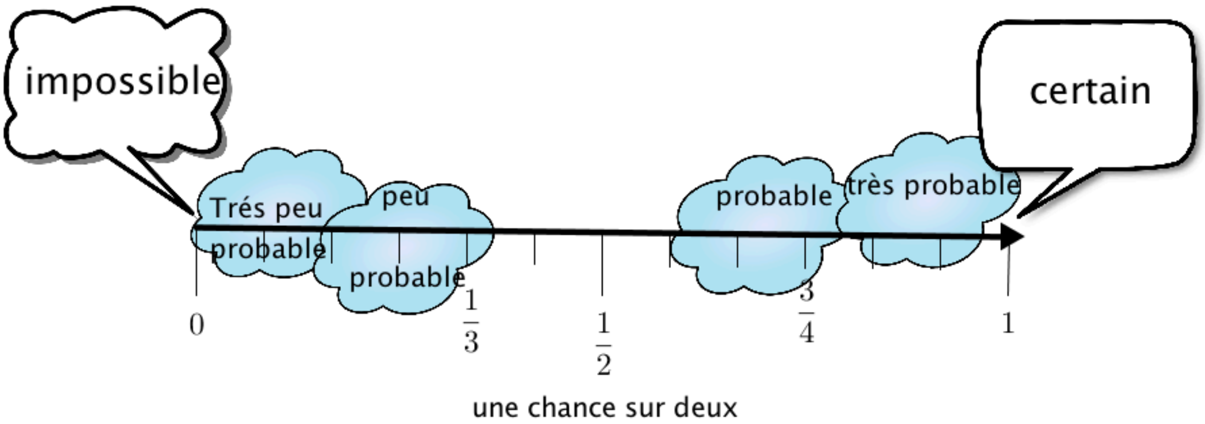
On considère une application affine f telle que $f(2)=1$ et $f(5)=2{,}5$.

On a : $a = \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}$ soit $a = \dfrac{2{,}5-1}{3}$ et donc $a = 0{,}5$

I. Modéliser une expérience aléatoire

Définition et propriétés-Rappels :

- Une expérience aléatoire est une expérience dont on connait tous les résultats possibles mais dont on ne peut pas prédire avec certitude lequel se produira.
- On appelle issue d'une expérience aléatoire chacun des résultats possibles
- On appelle univers d'une expérience aléatoire, l'ensemble des issues possibles
- Un évènement est une condition qui peut être, ou ne pas être réalisée lors d'une expérience.
- Un évènement est dit élémentaire lorsqu'il n'est réalisé que par une seule issue.
- Un évènement est dit impossible, s'il ne peut pas se produire : sa probabilité est égale à 0.
- Un évènement est dit certain, s'il se produit nécessairement : sa probabilité est égale à 1



Remarque :

Une expérience aléatoire est uniquement due au hasard.
Le résultat d'une expérience aléatoire ne dépend pas du résultat des expériences précédentes.

Propriété 2 :

Quand les issues d'une expérience aléatoire ont toutes la même probabilité, on parle d'équiprobabilité et on a :

$$p(\text{"}evenement\text{"}) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple :

Lorsqu'on jette un dé équilibré à 6 faces, chaque face a la même probabilité égale à $\frac{1}{6}$ de sortir.

II. Évènements incompatibles et contraires

a) Evènements incompatibles

Définition 2 :

Deux évènements sont incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser en même temps.

Propriété 3 :

Lorsque deux évènements sont incompatibles, la probabilité pour que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités.

Autrement dit, si A et B sont deux évènements incompatibles alors

$$P(\text{A ou B}) = P(\text{A}) + P(\text{B})$$

Exemple :

On considère le jet d'un dé équilibré à 6 faces.
On appelle l'évènement A : « obtenir le chiffre 1 » et l'évènement B : « obtenir le chiffre 2 » .
Ce sont deux évènement incompatibles.

Soit C l'évènement « obtenir le chiffre 1 ou le chiffre 2 ».

On a donc $p(C) = p(A) + p(B)$ soit $p(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ donc $p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) Evènements contraires

Définition 3 :

L'évènement contraire d'un évènement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.
On le note $\overline{A}$.

Propriété 4 :

La somme des probabilités d'un évènement A et de son contraire et 1 : $p(A) + p(\overline{A}) = 1$

Exemple :

$$p(\text{"}ne\ pas\ obtenir\ 4\text{"}) = 1 - p(\text{"}obtenir\ 4\text{"}) \text{ donc } p(\text{"}ne\ pas\ obtenir\ 4\text{"}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

III. Arbre de probabilité

Définition 4 :

L'arbre de probabilité d'une expérience indique chacun de ses issues.
On peut pondérer l'arbre de probabilité en indiquant sur chaque branche, la probabilité correspondante.

Propriété 5 :

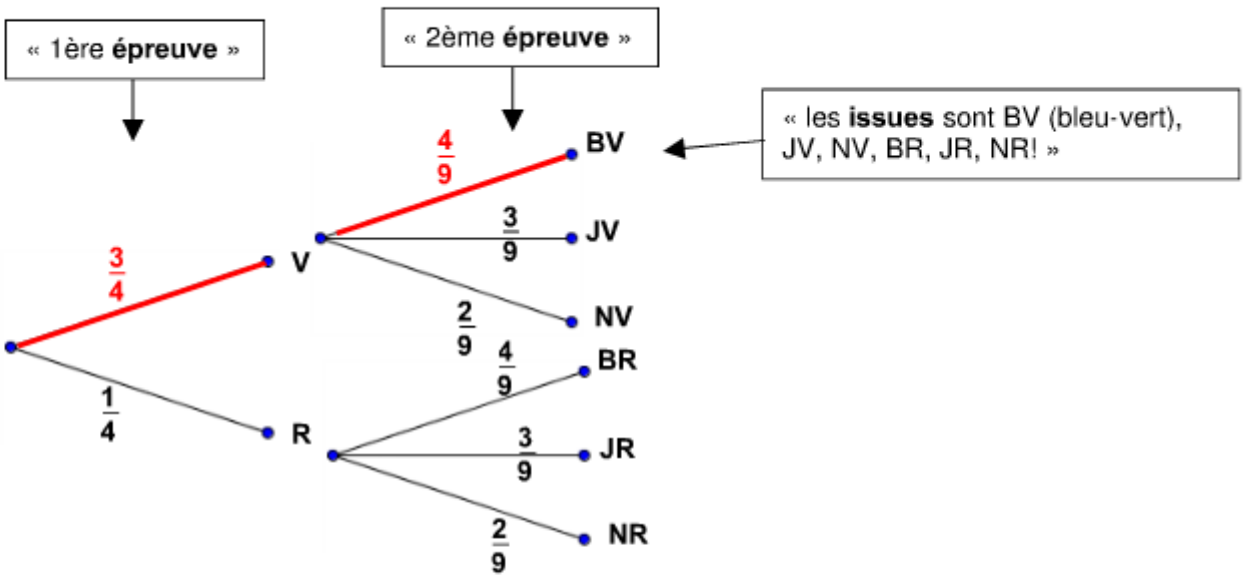
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Exemple :

L'expérience est constituée de deux épreuves successives.
On dispose de deux boîtes contenant des boules :

On tire d'abord une boule dans la boîte A et on note sa couleur.
Ensuite, on tire une boule dans la deuxième boîte B et on note la couleur

On trace ensuite l'arbre pondéré en probabilité de l'expérience (deux épreuves)



$p(BV) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{36} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

«La probabilité d'obtenir une boule verte et une boule bleu à l'issue de l'expérience est $\frac{1}{3}$»

$p(BV) + p(JV) + P(NV) = \frac{9}{9} = 1$

I. Rappels sur les équations

Exemples de résolution d'équations :

$$x+13=57$$
$$x+13-13=57-13$$
$$x=44$$

$$6x=84$$
$$\frac{6x}{6}=\frac{84}{6}$$
$$x=14$$

$$2x+6=84$$
$$2x+6-6=84-6$$
$$2x=78$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{78}{2}$$
$$x=36$$

$$2x+6=3x+8$$
$$2x+6-6=3x+8-6$$
$$2x=3x+2$$
$$2x-3x=3x-3x+2$$
$$-1x=2$$
$$-x=2$$
$$x=-2$$

Retrouver les solutions de ces équations et leurs explications en vidéos :
http://goo.gl/WtTSmG http://goo.gl/Z5lDlh http://goo.gl/KdlwYQ http://goo.gl/hczPXX

II. Les inéquations

Définition 1 :

-Une inéquation est une inégalité dans laquelle on a remplacé un nombre par une inconnue (une lettre).

-Résoudre une inéquation, c'est chercher toutes les valeurs que l'inconnue peut prendre pour que l'inégalité soit vraie.

Exemples :
$-5x+7<-5$ $-8+5x\geq 4$ $3x-4<5x+1$ sont des inéquations d'inconnue x.

Propriété 1 :

Pour résoudre une inéquation, on procède de façon similaire à la résolution d'une équation, selon les règles suivantes :

- On ne change pas le sens d'une inégalité lorsqu'on addition ou que l'on soustrait un même nombre à chacun des deux membres.

- On NE CHANGE PAS le sens d'un inégalité lorsqu'on multiplie ou que l'on divise par un même nombre POSITIF non nul chacun des deux membres.

- On CHANGE le sens d'une inégalité lorsqu'on multiplie ou que l'on divise par un même nombre NEGATIF non nul chacun des deux membres.

Exemples :

Résoudre l'inéquation $-2x+1>9$

$-2x+1>9$

On soustrait 1 à chaque membre

$-2x>8$

$x < \frac{8}{-2}$

On divise par le nombre négatif -2, donc on change

$x<-4$

Les solutions de l'inéquation $-2x+1>9$ sont tous les nombres strictement inférieurs à -4.

Résoudre l'équation $7x-3\geq 5x+1$

$7x-3\geq 5x+1$

$7x-5x-3\geq 1$

$2x-3\geq 1$

$2x\geq 1+3$

Les solutions de l'inéquation $7x-3\geq 5x+1$ sont tous les nombres supérieurs à

$2x\geq 4$

$x\geq \frac{4}{2}$

$x\geq 2$

III. Désignation des nombres

r désigne un nombre relatif.

- Le nombre après r se note $r+1$
- Le nombre avant n se note $r-1$
- Les nombres qui se suivent sont des nombres consécutifs : r et $r+1$ sont consécutifs
- Un multiple de 3 s'écrit sous la forme 3r avec $r\geq 0$

n désigne un nombre entier.

- Un nombre pair s'écrit sous la forme 2n
- Un nombre impair s'écrit sous la forme 2n +1

II. Se repérer dans l'espace

a) Sur un pavé droit

Définition 1 :

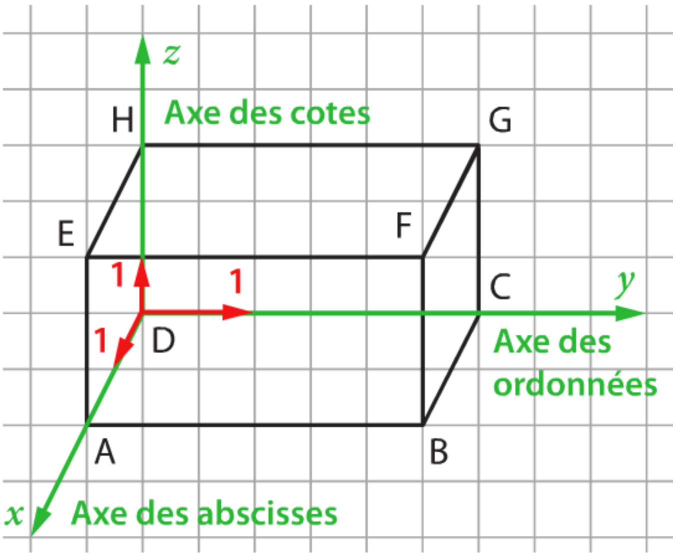
Tout point M d'un pavé droit peut être repéré à partir d'un sommet et des arêtes passant par ce sommet.

Un point M est repéré par 3 nombres appelés coordonnés de M :

- x_M est l'abscisse de M
- y_M est l'ordonnée du point M
- z_M est la cote (ou altitude) du point M

On note $\mathrm{M}(x_M; y_M; z_M)$.

Exemple :



Dans le repère tracé ci-contre :

- D est l'origine
- (Dx) est l'axe des abscisses
- (Dy) est l'axe des ordonnées
- (Dz) est l'axe des cotes

On a donc :

$D(0;\ 0;\ 0)$ $\quad A(2;\ 0;\ 0)$

$B(2;\ 3;\ 0)$ $\quad C(0;\ 3;\ 0)$

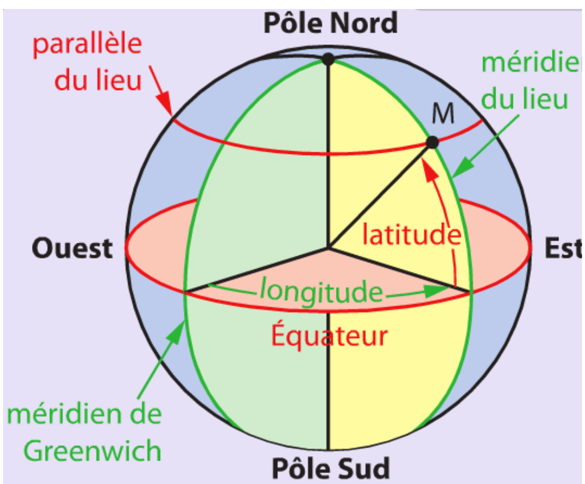
$H(0;\ 0;\ 3)$ $\quad F(2;\ 3;\ 3)$

b) Sur une sphère

Définition 2 :

Si on assimile la planète Terre à une sphère, on peut repérer un point à sa surface par deux coordonnées correspond à des mesures d'angles : sa latitude et sa longitude.
Pour cela, on utilise :

- des parallèles qui sont des cercles dont dont les points ont la même latitude.
  Le parallèle de référence est l'Equateur : ses points ont pour latitude 0°.
- des méridiens qui sont des demi-cercles passant par les pôles dont les points ont la même longitude.
  Le méridien de référence est le méridien de Greenwich : ses points ont pour longitude 0°.

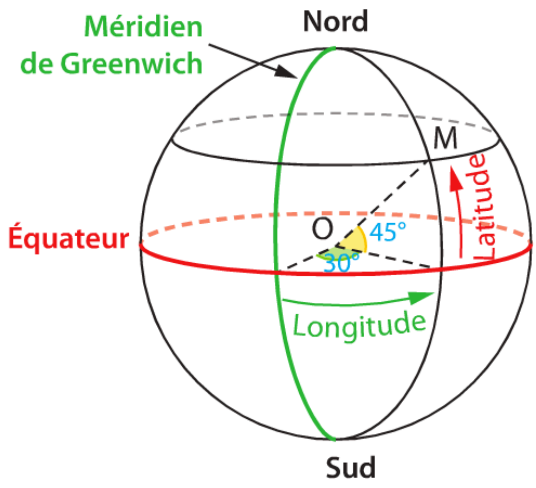


Remarque :

Les latitudes sont comprises entre 0° et 90° Nord ou Sud.
Les longitudes sont comprises entre 0° et 180° Est ou Ouest.

Exemple :

Le point M a pour latitude 45° Nord et pour longitude 30°Est



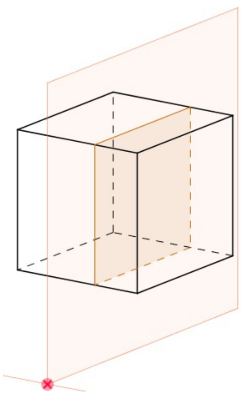
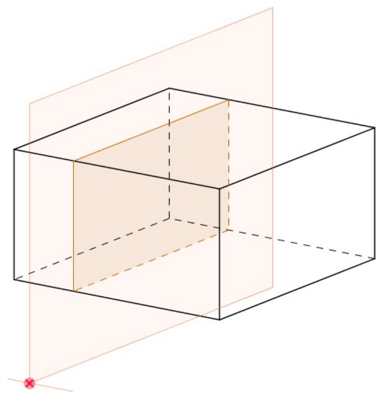
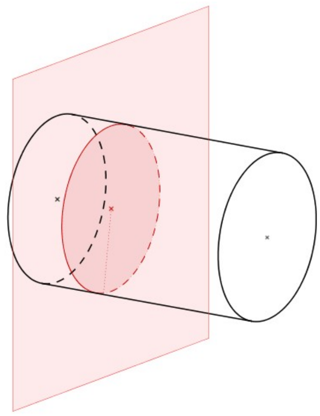
III. Sections de solides

a) Section par un plan parallèle à la base

Propriété 1 :

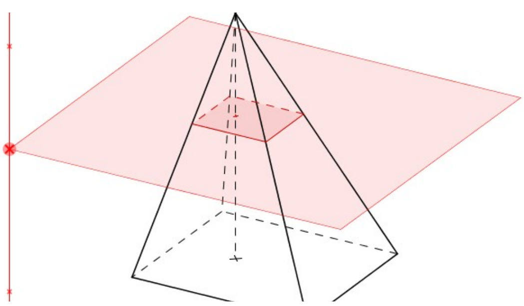
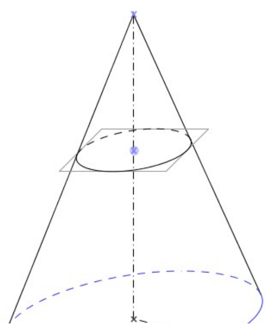
Lorsqu'on coupe un cube, un pavé droit ou un cylindre de révolution par un plan parallèle à la base, la section obtenue est :
- superposable à la base
- de même nature que la base.

Exemples :

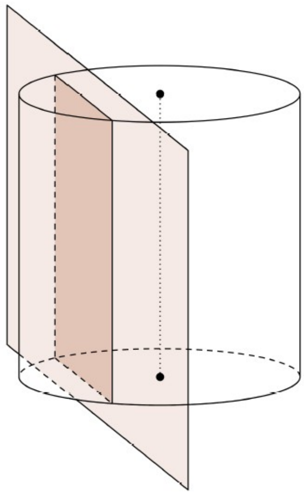




Propriété 2 :

Lorsqu'on coupe une pyramide ou un cône de révolution par un plan parallèle à la base, la section obtenue est :
- une réduction de la base
- de même nature que la base.

b) Section d'un cylindre parallèlement à sa hauteur



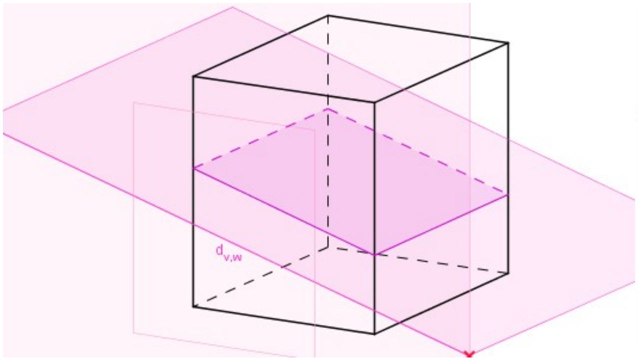
Propriété 3 :

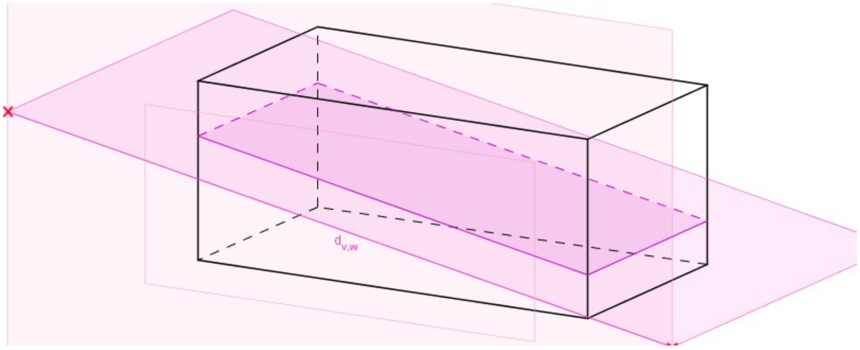
Lorsqu'on coupe un cylindre par un plan parallèle à sa hauteur, la section obtenue est un rectangle dont une dimension est égale à la hauteur du cylindre.

c) Section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête

Propriété 4 :

Lorsqu'on coupe un cube, ou un pavé droit par un plan parallèle à une arête, la section est un rectangle dont une dimension est égale à la longueur de cette arête.

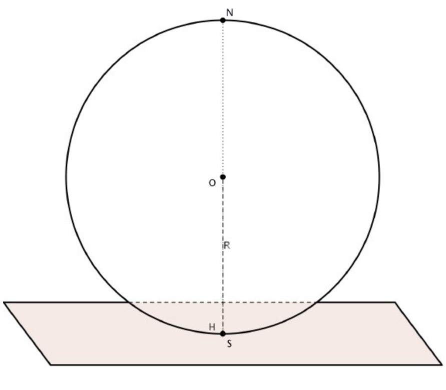


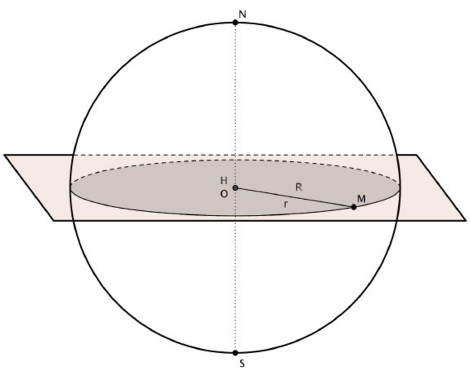


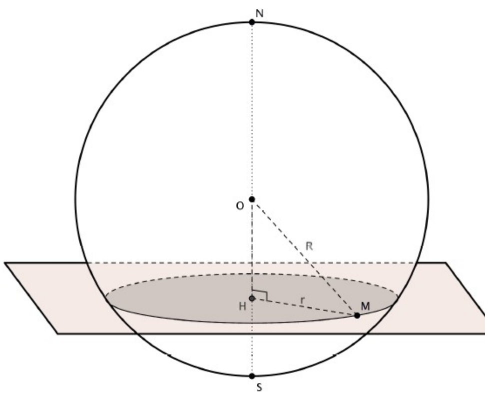
d) Section d'une sphère par un plan

Propriété 5 :

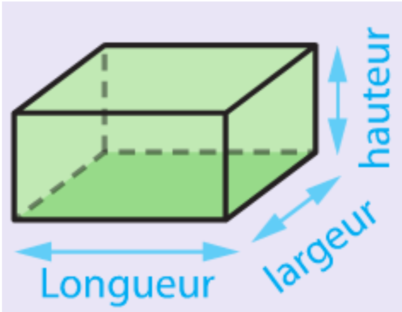
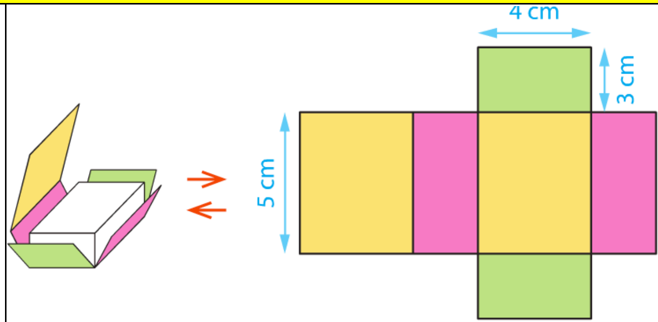
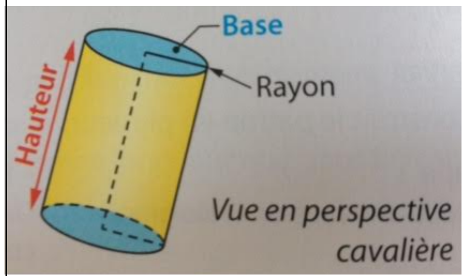
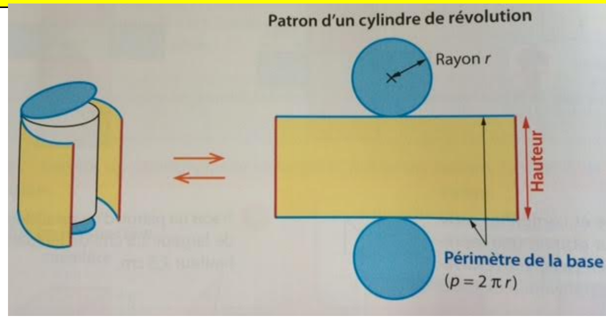
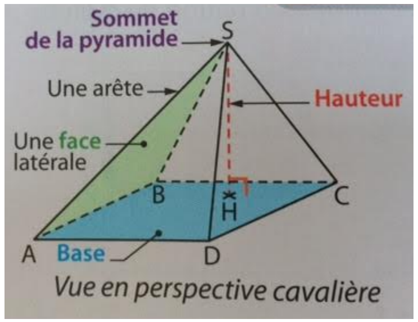
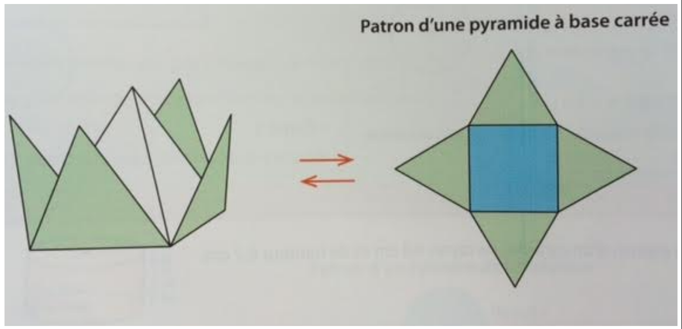
La section d'une sphère par un plan est un cercle (éventuellement réduit à un seul point).

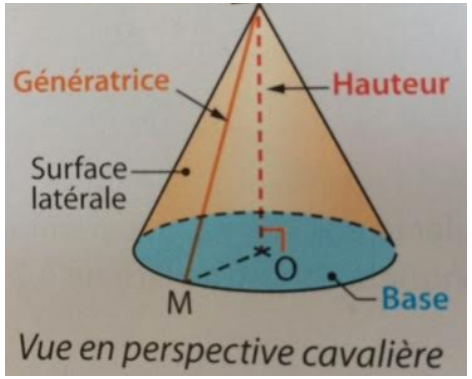
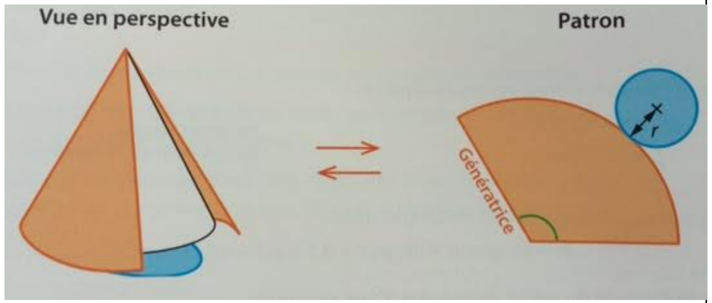
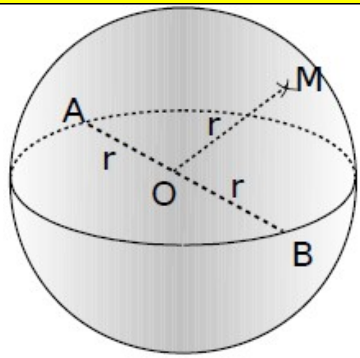






I. Représenter des solides et calculer des volumes

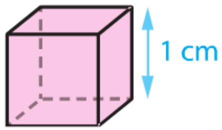
Pavé droit (ou parallélépipède rectangle)			
Solide composé de six faces rectangulaires. Cas particulier : le cube			longueur $\times$ largeur $\times$ haute
Cylindre de révolution			
Solide composé de : • deux faces parallèles et superposables en forme de disques (les bases) • une face latérale non plane			Aire de la base $\times$ hauteur $= \pi \times r^2 \times h$
Pyramide			
Solide composé de : • un sommet S • une base polygonale ne contenant pas le point S • faces latérales triangulaires ayant le point S parmi leurs sommets			$\frac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ haute

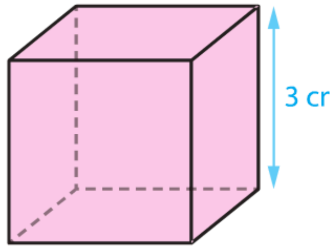
Cône de révolution			
Solide composé de : • une base en forme de disque • un sommet S situé sur la perpendiculaire à la base passant par son centre • une surface latérale non plane			$\frac{1}{3}\times$ aire de la base $\times$ hauteu $=\frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times h$
Sphère et boule			
La sphère (la boule) de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que : OM = r ($OM \leq r$)		Pas de patron	$A_{sphère} = 4\times\pi\times r^2$ $Volume_{Boule} = \frac{4}{3}\times\pi\times r^3$

<u>Propriété agrandissement-réduction :</u>

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par k^3.

<u>Exemple :</u>





$\mathscr{V} = 1\text{ cm}\times 1\text{ cm}\times 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$ $\qquad$ $\mathscr{V} = 3\text{ cm}\times 3\text{ cm}\times 3\text{ cm} = 27\text{ cm}^3$

La longueur de chaque arête a été multipliée par 3, le volume a été multiplié par